

harmful.online

в одиночку *вредно*

Отряд последней надежды

Неделя 1

Подсчёт

Вероятность

Асимптотика



Что внутри недели

Введение	Как устроена неделя. Уровни и минимальный маршрут. Что значит «я это умею»	3
Часть 0	Диагностика: 12 задач	7
Часть 1	Комбинаторика: база — компас, два правила, три конструкции	8
Часть 2	Комбинаторика нескольких ограничений	11
Часть 3	Вероятность: от подсчёта к вероятности	23
Часть 4	Асимптотика: кто здесь главный	29
Часть 5	Малый параметр и порядок Тейлора	32
Часть 6	Разбор публичной задачи открытого варианта	42
Часть 7	Мостик к неделе 2: вектор — это просто набор чисел	43
Часть 8	Холодный набор Н1–Н6 (темы не подписаны)	46
Часть 9	Теоретический минимум	46
Часть 10	Правило, которое дороже любого метода	47
Часть 11	Карта шаткости, чек-лист и смешанный повтор	48

Как устроена неделя, уровни и минимальный маршрут

Задача честная: не «пройти весь матан», а **научиться узнавать математическую структуру в незнакомой формулировке**, находить первый содержательный ход и доводить его до конца. Это не то же самое, что «выучить формулы». Формулу можно помнить и не узнать место, где она работает.

Как читать этот материал

Он подробный: с разобранными примерами, где расписан ход мысли, и с большим банком задач. Так сделано намеренно. **Не пугайся объёма**. Материал разделён на три уровня, и обязателен только первый. Если сил или времени мало, начни с минимального маршрута.

Ответ и разбор к каждой задаче — в курсе, после твоей попытки.

Минимальный маршрут

Догонять всё не надо. Если ты начал позже или отстал, вот пять пунктов, без которых дальше будет трудно:

1. **КАЗ** — сочетания, базовая техника;
2. **О-3** — блоки с общим элементом, сердце Части 2;
3. **В-2** — вероятность через сочетания;
4. **М-3** — порядок Тейлора: без этого недели 3 и 4 станут вдвое тяжелее;
5. **Ч1-Ч4** — мостик: без него неделя 2 начнётся с чувства, что ты попал не на тот курс.

Прошёл эти пять — **основа недели у тебя есть**. Наложения, состояния, Байес и все звёздочки можно **пропустить сознательно**: на неделе 6 будет второй проход, он для этого и существует.

Три уровня недели

1 Основное

Для всех. Ровно то, без чего вторая неделя станет непонятной.

1. Диагностика (Часть 0) — целиком.
2. Разделы 1.2–1.5 (компас, два правила, три конструкции, дополнение) + примеры К-1, К-2, К-4 воспроизвести рукой.
3. Разделы 2.2–2.4 (карта ходов, склейка, независимые блоки, общий элемент) + примеры О-1, О-3.
4. Раздел 2.6 (включения-исключения) + пример О-5.
5. Разделы 3.2–3.3 (исходы, событие, классическая вероятность) + примеры В-1, В-2.
6. Разделы 4.2–4.5 (иерархия роста, эквивалентности, Тейлор, рационализация) + примеры L-1, L-2.
7. Раздел 5.2 (протокол малого параметра) + примеры М-1, М-3.
8. Задачи: КА1–КА8, KB1–KB4, BA1–BA5, A1–A10.
9. «Дорешай сам»: МК1, М-О1, М-В1, МП1, МП2.
10. **Мостик к неделе 2** (Часть 7) и задачи Ч1–Ч6 — без него вторая неделя начнётся с паники.
11. Холодный набор: Н1, Н2, Н3.
12. Карта шаткости (раздел 11.1).

2 Дополнительная практика

Если основное пошло и хочется закрепить.

- разделы 2.5, 2.7 (несовместимые случаи; наложение фрагментов) и примеры О-4, О-6, О-7, О-8;
- «Дорешай сам» МК2, М-О2, М-В2, МП3;
- разделы 3.4–3.6 (условная вероятность, независимость, полная вероятность, Байес) и примеры В-4, В-5;
- примеры М-4b, М-5, М-6, М-7 (повторное сокращение, внешний множитель, симметрические комбинации, 1^∞);
- разбор задачи открытого варианта (Часть 6);
- задачи KB5–KB12, BB1–BB5, B1–B8;
- все блоки «Найди ошибку» (ФК, ФВ, ФП);
- холодный набор целиком Н1–Н6;
- теоретический минимум Т-1 ... Т-6 вслух.

3 Углубление

Если хочется задач экзаменационного уровня и выше. Всё, что помечено ★.

- раздел 2.8 «Подсчёт по состояниям» и пример М-8;
- задачи KC1–KC8, BC1–BC4, C1–C6;
- теоретический минимум ★ Т-7;

- объяснить одну задачу другому человеку вслух;
- тренировка частичных баллов (раздел 10.3).

Большой объём не значит, что всё обязательно. Пропустить звёздочку не значит отстать.

Что значит «я это умею»: четыре уровня

Понять разбор — не то же самое, что уметь решать. Дальше по всему курсу мы пользуемся одной шкалой:

УРОВЕНЬ	ЧТО ЭТО ЗНАЧИТ
0	Не узнаю тему. Не понимаю, о чём задача
1	Узнаю тему, но не знаю первого шага
2	Решаю с подсказкой: подсмотрел формулу, сверился с примером
3	Решаю холодно: тема не подписана, решаю от начала до конца, укладываюсь во время, оформляю

Зелёная отметка ставится только на уровне 3. «Я понял разбор» — это уровень 1–2, и врать себе тут дорого: цена вскроется на пробнике.

Про компьютер и справочники

Какие средства разрешены на экзамене, устанавливает приёмная кампания конкретного года — уточни на её странице: <https://pk.mipt.ru/master/>. В любом случае оценивают решение и обоснование, а не только ответ.

Для тебя это значит одно: **на тренировках консоль и калькулятор не используем** — иначе навык не появится, а именно навык проверяют. Сверить ответ можно в курсе после попытки.

И ещё одно, чего многие не ожидают: **машина проигрывает человеку чаще, чем кажется.** В этом курсе тебе встретятся задачи, где компьютер буксует, а человек, умеющий смотреть на структуру, закрывает вопрос за пять секунд. Калькулятор считает — но не умеет перевернуть картинку.

Мини-словарик: обозначения, о которых спотыкаются

- $\ln x$ — натуральный логарифм (основание $e \approx 2,718$). В матанализе логарифм по умолчанию натуральный.
- $\ln^2 x$ означает $(\ln x)^2$, а **не** $\ln(x^2)$. Прямая ловушка.
- $n!$ — факториал: $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$; по договорённости $0! = 1$.
- $o(x^3)$ («о-малое») — слагаемые, пренебрежимо малые по сравнению с x^3 : их отношение к x^3 стремится к нулю. Читай как «плюс хвост мельче x^3 ».
- $f \sim g$ — отношение f/g стремится к 1: «в первом приближении одинаковы».
- $|A|$ — количество элементов множества A (в комбинаторике), не модуль.
- $P(A \mid B)$ — вероятность события A при условии, что B произошло.
- $\lfloor a \rfloor$ — целая часть: сколько целых раз a укладывается вниз ($\lfloor 3,7 \rfloor = 3$).

Микро-FAQ. «Можно ли сокращать дробь на x , если $x \rightarrow 0$?» — да: x стремится к нулю, но не равен нулю, поэтому $x/x = 1$. «Ответ вышел некрасивым, вроде $-\frac{1}{3}$, — это ошибка?» — не обязательно: проверяй ход, а не красоту числа. «Забыл формулу?» — сначала попробуй вспомнить сам и только потом сверься с таблицей из раздела 4.4.

Диагностика: 12 коротких задач



Попробуй каждый пункт. Не получается — ставь прочерк и иди дальше. Это карта местности: **нормально не решить половину**. Рядом — на какой неделе разбираем.

Д1 (есть в курсе) (предел, нед. 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x}{x^2 - 5}$.

Д2 (есть в курсе) (производная и экстремум, нед. 3) $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Точка минимума и значение в ней.

Д3 (есть в курсе) (определённый интеграл, нед. 4) $\int_0^1 3x^2 dx$.

Д4 (есть в курсе) (сумма ряда, нед. 4) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Д5 (есть в курсе) (ранг, нед. 2) Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Д6 (есть в курсе) (собственные значения, нед. 2) Собственные значения $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Д7 (есть в курсе) (градиент, нед. 5) Градиент $f(x, y) = x^2 + 3y^2$.

Д8 (есть в курсе) (подсчёт, нед. 1) Сколькими способами выбрать 2 задачи из 5?

Д9 (есть в курсе) (несобственный интеграл, нед. 4) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ — сходится ли и чему равен?

Д10 (есть в курсе) (двойной интеграл, нед. 5) Для $\iint_{[0,1] \times [0,2]} xy \, dx \, dy$ запиши повторный интеграл и, если получится, посчитай.

Д11 (есть в курсе) (вероятность, нед. 1) В урне 4 белых и 6 чёрных шаров. Берут один наугад. Вероятность, что он белый?

Д12 (есть в курсе) (порядок разложения, нед. 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$.

♦ Как читать результат

Ответ и разбор к каждой задаче откроются в курсе после попытки. Диагностика ничего не открывает и не закрывает — она только показывает, откуда ты стартуешь.

Считай не баллы, а прочерки.

- Много прочерков — ты в правильном месте, для того и пришёл. Начни с уровня «Основное» и блоков А.
- Почти всё решил — ты вспоминающий: мини-уроки листай по диагонали, основное проходи быстро и переходи к дополнительной практике и углублению.

- **Д1 пошла, а Д12 нет** — это самый типичный расклад, и он ровно про то, чему учит Часть 5. «Предел» и «выбор порядка разложения» — разные навыки.

♦ ЧАСТЬ 1

Комбинаторика: база

1

1.1. Зачем это нужно

Комбинаторика — искусство аккуратно посчитать, сколько существует вариантов, **не выписывая их все руками**. Хорошая новость: она не требует матана, поэтому доступна с самого нуля. Плохая: именно здесь чаще всего ошибаются не в вычислении, а в том, **что именно считают**.

Комбинаторика входит в официальную программу и может встречаться в разных частях варианта — в том числе внутри вероятностной задачи: вероятность в дискретной модели — это дробь, у которой и числитель, и знаменатель считаются комбинаторикой.

1.2. Компас: два вопроса каждой задаче

1. **Важен ли порядок?** («Петя-староста, Вася-зам» — это не то же, что «Вася-староста, Петя-зам»? Если разные — порядок важен.)
2. **Можно ли повторять?** (Один и тот же элемент можно брать дважды или нет?)

Ответы на эти два вопроса почти всегда определяют формулу. Держи их в голове — это твой компас.

1.3. Два правила, из которых растёт всё

Правило произведения. Если выбор состоит из последовательных шагов и на шаге 1 есть a вариантов, на шаге 2 есть b и т.д., всего вариантов — произведение $a \cdot b \cdot \dots$

Бытовая аналогия: 3 футболки и 2 пары джинсов $\rightarrow 3 \cdot 2 = 6$ комплектов. Не $3 + 2$.

Правило суммы. Если варианты разбиты на **непересекающиеся** группы (это ИЛИ то, и они не пересекаются), всего — сумма количеств.

Аналогия: один из 3 супов **или** один из 4 салатов (что-то одно) $\rightarrow 3 + 4 = 7$.

Как не путать: шаги подряд («и то, и то») $\rightarrow$ умножаем; взаимоисключающие случаи («или то, или то») $\rightarrow$ складываем.

⚠ Слово «непересекающиеся» в правиле суммы — не украшение. Как только группы пересекаются, простое сложение даёт **повторный счёт**. Именно из этого вырастет вся Часть 2.

1.4. Три главные конструкции

Перестановки. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ — число способов расставить n различных объектов в ряд. По договорённости $0! = 1$.

Размещения — выбираем k объектов из n и ставим по местам, **порядок важен**:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \underbrace{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k \text{ множителей}}$$

Сочетания — выбираем k из n , **порядок не важен** (просто группа):

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}$$

Мостик между ними — ключевая идея. Когда порядок не важен, каждую одну и ту же группу размещения посчитали $k!$ раз (столькими способами её саму можно упорядочить). Делим на $k!$ — убираем повтор.

С повторениями. Если порядок важен и повторения разрешены: k позиций, на каждой n вариантов $\rightarrow n^k$.

Полезное свойство: $C_n^k = C_n^{n-k}$ (выбрать, кого взять = выбрать, кого не взять).

1.5. Приём «хотя бы один» $\rightarrow$ через дополнение

$$(\text{хотя бы один}) = (\text{всего}) - (\text{ни одного})$$

Прямой перебор («ровно один, или ровно два, или...») длиннее и опаснее.

1.6. Разобранные примеры

Как работать с разобранным примером. Закрой решение и честно попробуй сам, не подглядывая. Потом читай разбор и после каждого шага спрашивай: «почему этот шаг, а не другой?». Дочитал — закрой текст и воспроизведи решение с чистого листа. Просто чтение даёт иллюзию понимания: «всё ясно» на диване превращается в ступор на экзамене. **Правило действует на все разобранные примеры в документе.**

◆ ПРИМЕР К-1 · МАКСИМАЛЬНО ПОДРОБНО

Из 8 человек нужно выбрать команду из 3. Сколькими способами?

Что замечаем в условии: слово «команда» — про группу, а не про роли.

Шаг 1. Важен ли порядок? Команда — просто группа людей, ролей внутри нет. «Аня, Боря, Витя» — та же команда, что «Витя, Аня, Боря». **Порядок не важен.**

Шаг 2. Есть ли повторения? Один человек не может войти в команду дважды. **Повторений нет.**

Вывод: порядок не важен, повторений нет $\rightarrow$ сочетания C_8^3 .

Шаг 3. Считаем.

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{336}{6} = 56$$

Приём: не раскрывай $8!$ полностью. Сверху бери ровно $k = 3$ множителя, снизу $3!$. Быстрее и безопаснее.

Ответ: 56.

А если бы ошиблись? $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ — это ответ на **другой** вопрос: «выбрать 3 человека и назначить им 3 разные роли». В 6 раз больше, потому что каждую команду мы посчитали $3! = 6$ раз. Вот зачем нужен вопрос про порядок.

◆ ПРИМЕР К-2 · ПОДРОБНО

Сколько «слов» длины 4 можно составить из 26 букв, если буквы могут повторяться?

Компас: порядок важен (ЛОРА $\neq$ РОЛА); повторения разрешены.

Порядок важен **И** повторения можно $\rightarrow$ чистое правило произведения: на каждую из 4 позиций любая из 26 букв, независимо:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^4 = 456\,976$$

Ответ: $26^4 = 456\,976$. Запомни образец: « k позиций, на каждой n вариантов, повторения можно» $\rightarrow n^k$.

◆ ПРИМЕР К-3 · КОРОЧЕ

В группе 6 новичков и 4 вспоминающих. Сколькими способами собрать команду из 3 новичков и 2 вспоминающих?

Два независимых выбора, соединённых правилом произведения. Новичков: $C_6^3 = 20$. Вспоминающих: $C_4^2 = 6$. Итого $20 \cdot 6 = 120$.

Ответ: 120.

◆ ПРИМЕР К-4 · ПРИЁМ «ХОТЯ БЫ ОДИН»

Монету бросают 5 раз. Сколько последовательностей исходов содержат хотя бы одного орла?

Всего последовательностей: $2^5 = 32$. «Ни одного орла» — ровно одна (все решки). Значит:

$$32 - 1 = 31$$

Ответ: 31.

(Прямой перебор $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ — тот же ответ, но дольше и с риском ошибиться.)

🔍 ДОРЕШАЙ САМ

МК1

Сколькими способами из 9 человек выбрать команду из 4? *Начало:* ролей нет → порядок не важен → сочетания: $C_9^4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = ?$ — закончи вычисление.

МК2

Сколько шестизначных чисел из цифр 1–6 без повторений делятся на 2? *Начало:* число чётно → последняя цифра фиксируется: 2, 4 или 6 — три варианта. Дальше решаешь ты: что происходит с остальными пятью цифрами и почему выбор для них свободен?

1.7. Типичные ошибки базы

- **Спутать сочетания и размещения.** Лекарство — вопрос компаса: есть роли (капитан, зам) → размещения; ролей нет (просто команда) → сочетания.
- **Сложить там, где надо умножить.** «И то, и то» (шаги подряд) → умножаем. «Или то, или то» → складываем.
- **Двойной счёт.** Проверь, не посчитан ли один и тот же **итоговый объект** дважды. Это главная тема Части 2.
- **Забыть про повторения.** «Можно повторять» и «нельзя» дают разные формулы (n^k против A_n^k).
- **«Хотя бы один» решать в лоб.** Почти всегда быстрее через дополнение.

♦ ЧАСТЬ 2

Комбинаторика нескольких ограничений

2

2.1. Зачем этот раздел существует

Формулы C_n^k и A_n^k ты знаешь. Но «просто выбрать 3 из 10» почти не спрашивают. Спрашивают с **ограничениями**: «эти двое рядом», «а эти — нет», «число делится на 5», «каждому досталось хотя бы по одному», «в последовательности встречается такой фрагмент».

Наивная формула тут ломается — и ломается **тихо**: ты получаешь число, оно выглядит правдоподобно, и оно неверно. Этот раздел — про то, как ограничения обходят системно.

2.2. Карта выбора метода: пять ходов

Увидел ограничение — прогони пять ходов. Один сработает.

ХОД	КАК УЗНАЁТСЯ	ЧТО ДЕЛАЕМ
Склейка	«должны быть вместе / рядом / подряд»	Склеиваем в один блок, считаем перестановки блоков, умножаем на внутренние порядки
Разбиение на случаи	есть особый элемент (ноль, край, запрет), из-за которого варианты несимметричны	Разбиваем на непересекающиеся случаи, складываем
Дополнение	«хотя бы один», «НЕ рядом», «не все»	Считаем противоположное и вычитаем из общего
Включения-исключения	несколько условий, соединённых «или», и они пересекаются	Складываем, вычитаем попарные пересечения, прибавляем тройные...
Проверка повторного счёта	всегда, последним действием	Спроси: «может ли один и тот же итоговый объект возникнуть из двух разных моих построений?»

Пятый ход — не бонус, а обязательная строчка. Большинство неверных комбинаторных ответов — это верная логика плюс незамеченный двойной счёт.

2.3. Один обязательный блок: склейка

◆ ПРИМЕР 0-1 · МАКСИМАЛЬНО ПОДРОБНО

Сколькими способами рассадить 6 человек в ряд, если Аня и Боря должны сидеть рядом?

Что замечаем: условие «рядом» связывает **двух** людей в жёсткую пару.

Шаг 1. Склеиваем. Аня и Боря — один «блок». Рассаживаем не 6 объектов, а **5**: блок плюс четверо остальных.

Шаг 2. Перестановки объектов: $5! = 120$.

Шаг 3. Внутренний порядок блока. Внутри блока Аня и Боря могут сидеть двумя способами: АБ или БА. Умножаем на 2.

$$5! \cdot 2 = 240$$

Шаг 4. Проверка повторного счёта. Могла ли одна и та же рассадка получиться дважды? Нет: рассадка однозначно определяет и положение блока, и порядок внутри него. Чисто.

Ответ: 240.

Проверка порядка величины: всего рассадок $6! = 720$. Условие «рядом» должно отсечь бóльшую часть — осталась треть. Правдоподобно.

2.4. Несколько блоков: независимые и с общим элементом

Здесь начинается настоящая работа. Два ограничения ведут себя по-разному в зависимости от того, пересекаются ли они по объектам.

◆ ПРИМЕР О-2 · ДВА НЕЗАВИСИМЫХ БЛОКА

7 человек в ряд. Аня рядом с Борей И Вера рядом с Глебом. Все четверо — разные люди.

Ограничения **не пересекаются**: они про разные пары. Значит, склейки независимы.

- Склеиваем АБ в блок, ВГ в блок. Объектов: 2 блока плюс 3 одиночки, всего 5.
- Перестановки: $5! = 120$.
- Внутренние порядки: 2 в первом блоке, 2 во втором, вместе 4.

$$5! \cdot 2 \cdot 2 = 480$$

Ответ: 480. (Проверено полным перебором всех $7! = 5040$ рассадок.)

◆ ПРИМЕР О-3 · БЛОКИ С ОБЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ — ГЛАВНАЯ ЛОВУШКА РАЗДЕЛА

6 человек в ряд. Аня рядом с Борей И Боря рядом с Верой.

Что замечаем: **Боря входит в оба условия.** Это не два независимых блока — это одна связанная конструкция.

Наивный ход (неверный): «два блока, каждый со своим внутренним порядком: $5! \cdot 2 \cdot 2$ ». Так нельзя: блоки невозможно посадить независимо, они склеены через Борю, а он один и не может сидеть в двух местах.

Правильно: раз Боря соседствует и с Аней, и с Верой, а мест рядом с человеком в ряду только два, **Боря стоит между ними.** Все трое образуют один блок из трёх человек, причём **Боря в середине.**

- Внутренние порядки блока: только **два** — АБВ и ВБА. (Не $3! = 6$. Порядки, где Боря с краю, нарушают условие.)
- Объектов: блок плюс 3 одиночки, всего 4. Перестановки: $4! = 24$.

$$4! \cdot 2 = 48$$

Ответ: 48. (Полный перебор подтверждает: ровно 48.)

Мораль, ради которой этот пример существует. Прежде чем клеить блоки, спроси: **есть ли у ограничений общий элемент?**

- **Нет общего** → блоки независимы, перемножай.
- **Есть общий** → сначала выясни, какую **конструкцию** ограничения вынуждают целиком, и только потом считай её внутренние порядки.

Эта развилка стоит целой задачи, и её нет ни в одной формуле.

🔍 ДОРЕШАЙ САМ

М-01 6 человек в ряд. **Аня рядом с Борей И Аня рядом с Верой.** Начало: прогоняем карту ходов. Условие «рядом» → склейка. Но сначала обязательный вопрос:

Есть ли в двух условиях общий человек? Кто именно? Кто из троих должен сидеть в середине? Сколькими способами можно расположить двух остальных по краям?

Дальше — считаешь ты. (Осторожно: ответ не обязан совпасть с 0-3, а может и совпасть. Проверь, почему.)

М-02 Сколько чисел от 1 до 100 делятся на 2, на 3 или на 5? Начало: три условия, соединённых «или», и они очевидно пересекаются (число 30 делится на всё сразу) → **включения-исключения**. Одиночные: $\lfloor 100/2 \rfloor = 50$, $\lfloor 100/3 \rfloor = 33$, $\lfloor 100/5 \rfloor = 20$.

Дальше — ты: выпиши три попарных пересечения (на что делится число, попавшее сразу в два условия?), одно тройное, собери формулу со знаками и проверь ответ на абсурд.

2.5. Несовместимые случаи и разбиение

Когда в задаче есть **особый элемент** — ноль (его нельзя ставить первым), край, запрет, — варианты становятся несимметричными, и «умножить на два» не проходит.

◆ ПРИМЕР 0-4 · РАЗБИЕНИЕ НА СЛУЧАИ

Сколько четырёхзначных чисел с различными цифрами являются чётными?

Что замечаем: два ограничения **конфликтуют за одну цифру** — ноль. Ноль чётный (годится в конец), но ноль нельзя ставить в начало. Значит, случай «последняя цифра ноль» ведёт себя не так, как остальные.

Случай 1: последняя цифра 0. Первая — любая из 1–9: **9**. Вторая — любая из оставшихся 8 (ноль уже занят): **8**. Третья — из оставшихся 7: **7**.

$$9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

Случай 2: последняя цифра из {2, 4, 6, 8} — 4 варианта. Первая — не 0 и не занятая последняя: **8**. Вторая — любая из оставшихся 8 (ноль теперь можно): **8**. Третья — **7**.

$$4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 1792$$

Случаи не пересекаются (последняя цифра либо ноль, либо нет) → складываем:

$$504 + 1792 = 2296$$

Ответ: 2296. (Проверено перебором всех четырёхзначных чисел.)

Где ломается наивный подход. «Последняя чётная — 5 вариантов; первая — 8; дальше $8 \cdot 7$ » даёт $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$. Неверно: при последней цифре ноль у первой цифры **девять** вариантов, а не восемь. Разница в 56 чисел — и она вся про ноль.

Правило: особый элемент (ноль, край, запрет) → **разбивай на случаи**, а не умножай.

2.6. Включения-исключения

Правило суммы требовало **непересекающихся** групп. Как только группы пересекаются, начинается двойной счёт — и его надо вычесть.

Для двух множеств:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Для трёх:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Откуда знаки. Возьми элемент, лежащий ровно в **двух** множествах. В первой сумме он посчитан 2 раза, значит надо вычесть 1 — и ровно одно попарное пересечение его содержит. ✓

Теперь элемент из **всех трёх**: посчитан 3 раза, вычтен 3 раза (три попарных пересечения) → стал нулём. А должен быть посчитан один раз. Возвращаем: +1.

Знаки чередуются не по традиции, а по этой бухгалтерии. Если умеешь объяснить её вслух — формулу можно не запоминать, она выведется.

◆ ПРИМЕР 0-5 · ТРИ УСЛОВИЯ

Сколько чисел от 1 до 300 делятся на 2, на 3 или на 5?

$$|A| = \left\lfloor \frac{300}{2} \right\rfloor = 150, \quad |B| = \left\lfloor \frac{300}{3} \right\rfloor = 100, \quad |C| = \left\lfloor \frac{300}{5} \right\rfloor = 60$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{300}{6} \right\rfloor = 50, \quad |A \cap C| = \left\lfloor \frac{300}{10} \right\rfloor = 30, \quad |B \cap C| = \left\lfloor \frac{300}{15} \right\rfloor = 20$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{300}{30} \right\rfloor = 10$$

$$150 + 100 + 60 - 50 - 30 - 20 + 10 = 220$$

Ответ: 220. (Проверено прямым перебором.)

Наивное сложение дало бы $150 + 100 + 60 = 310$ — больше, чем всего чисел. Абсурдный ответ ловится за пять секунд, если на него посмотреть.

◆ ПРИМЕР О-6 · ВКЛЮЧЕНИЯ-ИСКЛЮЧЕНИЯ ТАМ, ГДЕ ИХ НЕ ЖДЁШЬ

5 разных задач раздают 3 проверяющим. Сколькими способами, если каждый проверяющий должен получить хотя бы одну задачу?

Что замечаем: «хотя бы одну» → **дополнение**. Но дополнений здесь несколько: «первый остался пуст», «второй остался пуст», «третий остался пуст» — и они **пересекаются** (пустыми могут остаться сразу двое). Значит: дополнение **плюс** включения-исключения.

- Всего раздач без ограничений: каждая из 5 задач любому из 3 → $3^5 = 243$.
- Раздач, где конкретный проверяющий пуст: остальные двое берут всё → $2^5 = 32$. Проверяющих 3 → вычитаем $3 \cdot 32 = 96$.
- Но раздачи, где пусты **сразу двое**, мы вычли дважды. Их: всё уходит одному → $1^5 = 1$. Пар проверяющих 3 → прибавляем $3 \cdot 1 = 3$.

$$3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3 \cdot 1^5 = 243 - 96 + 3 = 150$$

Ответ: 150. (Проверено перебором всех 3^5 раздач.)

Это тот же скелет, что в О-5, просто множества называются «первый пуст», «второй пуст», «третий пуст». **Узнавать скелет важнее, чем помнить формулу.**

2.7. Наложение фрагментов

Отдельная и коварная семья задач: «последовательность, содержащая заданный фрагмент».

Контекст бывает разный — коды и пароли, расписания дежурств, серии бросков монеты, маршруты, последовательности ролей, — а механика одна. **Именно поэтому важно не привязываться к буквам:** узнавать надо структуру, а не значок.

Коварство в том, что **фрагменты умеют накладываться друг на друга:**

- два вхождения могут не пересекаться вовсе;
- конец одного вхождения может быть началом другого;
- **длина наложения бывает разной** — фрагмент может накладываться на себя по одной букве, по двум, а иногда не может вообще;
- **порядок фрагментов имеет значение**: «есть `AB`» и «есть `BA`» — разные условия, и их пересечение — третье;
- **одно и то же итоговое слово может быть «построено» твоей конструкцией несколькими способами** — вот здесь и рождается повторный счёт.

Отсюда правило: **после подсчёта конструкций проверь, не посчитан ли один и тот же объект дважды.**

◆ ПРИМЕР 0-7 · СНАЧАЛА ПОКАЖУ, КАК ОШИБИТЬСЯ

Сколько слов длины 5 из букв А и В содержат хотя бы одно вхождение фрагмента `AA`?

Наивный (неверный) ход. «Фрагмент `AA` занимает две соседние позиции. Позиций для него: 1–2, 2–3, 3–4, 4–5 — **четыре**. Остальные три буквы свободны: $2^3 = 8$. Итого $4 \cdot 8 = 32$.»

Ответ 32 — а всего слов длины 5 ровно $2^5 = 32$. Получилось, что **все** слова содержат `AA`, включая `BBBBB`. Абсурд, значит ход сломан.

Где сломан. Слово `AAABV` посчитано дважды: один раз как «`AA` на позициях 1–2, остальное свободно», второй — как «`AA` на позициях 2–3». **Одно слово, два построения — повторный счёт из-за наложения.**

Правильный ход: дополнение. Считаем слова **без** `AA`, то есть без двух А подряд.

Пусть $f(n)$ — число таких слов длины n . Смотрим на **последнюю букву**:

- слово кончается на **В** → перед ней стоит любое хорошее слово длины $n - 1$: $f(n - 1)$ вариантов;
- слово кончается на **А** → тогда предпоследняя обязана быть **В** (иначе `AA`), а перед ней — любое хорошее слово длины $n - 2$: $f(n - 2)$ вариантов.

Случаи не пересекаются и покрывают всё:

$$f(n) = f(n - 1) + f(n - 2), \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 3$$

$$f(3) = 5, \quad f(4) = 8, \quad f(5) = 13$$

Слов с `AA`: $32 - 13 = 19$.

Ответ: 19. (Проверено полным перебором всех 32 слов.)

Два вывода.

1. Ограничение вида «есть фрагмент» почти всегда удобнее считать **через дополнение**: «нет фрагмента».
2. Рекуррентность выше — не фокус, а естественная запись мысли **«что могло стоять последним»**. Ты только что вывел числа Фибоначчи, не зная, что они так называются.

◆ ПРИМЕР О-8 · РАЗНАЯ ДЛИНА НАЛОЖЕНИЯ (ДРУГОЙ КОНТЕКСТ)

Кодовый замок открывается двумя кнопками — красной (●) и синей (○). Хозяин нажал 5 кнопок. Замок срабатывает, если в наборе где-нибудь встретилась комбинация ●○○ (красная, синяя, красная). Сколько наборов из пяти нажатий открывают замок?

Что замечаем: букв нет, но структура та же — последовательность длины 5 из двух символов, обязательный фрагмент длины **три**. Обозначим ●=А, ○=В: ищем слова длины 5, содержащие `АВА`.

Наивный ход. «Фрагмент занимает три позиции подряд: позиции 1–3, 2–4, 3–5 — три места. Остальные две буквы свободны: $2^2 = 4$. Итого $3 \cdot 4 = 12$.»

Проверяем на повторный счёт — и вот здесь новое. У фрагмента `АВА` первая буква совпадает с последней. Значит, два вхождения могут **наложиться ровно на одну букву**:

А В А В А

Здесь `АВА` стоит и на позициях 1–3, и на позициях 3–5, деля с собой среднюю А. Слово `АВАВА` посчитано дважды.

А вот наложение по **двум** буквам для `АВА` невозможно: это требовало бы, чтобы `ВА` совпало с `АВ`, а они разные. **Разные фрагменты допускают разные длины наложения — это надо каждый раз проверять отдельно, а не запоминать.**

Слов, посчитанных дважды, ровно одно (`АВАВА`), значит:

$$12 - 1 = 11$$

Ответ: 11 наборов. (Проверено полным перебором всех 32 наборов.)

Сравни с О-7. Там наивный ход был безнадежен (32 из 32 — полный абсурд, дополнение спасло). Здесь он почти верен, ошибка всего в единицу — и **именно поэтому опаснее**: неверный ответ 12 выглядит совершенно правдоподобно и не ловится взглядом.

Мораль: чем правдоподобнее ответ, тем обязательнее проверка повторного счёта.

♦ Тот же скелет в других костюмах

Чтобы структура не срослась в голове с буквами А и В, вот те же задачи в другой одежде. **Ищи в них знакомый скелет — это и есть тренировка распознавания.**

ЗАДАЧА	ЧТО ЭТО НА САМОМ ДЕЛЕ
Расписание на 7 дней, каждый день дежурит Аня или Боря; Аня не должна дежурить два дня подряд	слова длины 7 без `AA` → рекуррентность О-7 (KB11)
Робот идёт по клеткам: 3 шага вправо и 2 вверх; два шага вверх подряд запрещены	размещение шагов по промежуткам (KB12)
Сигнализация срабатывает на комбинацию из трёх нажатий	обязательный фрагмент с наложением (О-8)
Один и тот же проверяющий не назначается в два соседних дня	подсчёт по состояниям (H4)

2.8. ★ Подсчёт по состояниям

Пример О-7 обобщается, и обобщается системно.

Идея. При построении последовательности слева направо тебе не нужна вся история — нужен только **значимый хвост**. Это и есть **состояние**.

Задача. Сколько слов длины n из букв А и В **не содержат** фрагмента `AAA`?

Состояние — сколько букв А подряд стоит на конце уже построенного слова: 0, 1 или 2. Состояние 3 запрещено, это и есть `AAA`.

Переходы. Дописываем букву:

- дописали **В** → хвост обнулится: из любого состояния попадаем в 0;
- дописали **А** → хвост вырос на единицу: $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow$ **запрещено**.

Разбор по длине финального хвоста из А даёт ту же логику, что в О-7, только с тремя вариантами (слово кончается на `В`, на `ВА` или на `ВAA`):

$$t(n) = t(n-1) + t(n-2) + t(n-3), \quad t(1) = 2, \quad t(2) = 4, \quad t(3) = 7$$

(Почему $t(3) = 7$: всего $2^3 = 8$ слов, плохое одно — `AAA`.)

$$t(4) = 13, \quad t(5) = 24, \quad t(6) = 44, \quad t(7) = 81, \\ t(8) = 149, \quad t(9) = 274, \quad t(10) = 504.$$

Слов длины 10 без `AAA`: 504. (Проверено перебором всех 1024 слов.)

Зачем это тебе. Метод состояний закрывает целый класс задач одним движением: за-прещённый фрагмент, обязательный фрагмент, «не более двух подряд», «никакие две соседние не совпадают». Вместо изобретения хитрости каждый раз — один вопрос:

«Какой минимальной информации о хвосте мне достаточно, чтобы понять, какой символ можно дописать?»

Ответ на него и есть состояние. Дальше — механика.

2.9. Когда не так гладко

- **Склеили блоки, не проверив общий элемент (O-3).** Самая дорогая ошибка раздела.
- **Умножили там, где нужны случаи (O-4).** Признак: в задаче есть ноль, край или запрет.
- **Сложили пересекающиеся условия (O-5, ФК2).** Признак: слово «или», а множества явно налезают друг на друга.
- **Забыли проверить повторный счёт (O-7, O-8).** Признак: ответ подозрительно круглый — или, наоборот, **подозрительно правдоподобный**.
- **Решили, что наложение бывает только одной длины.** Для каждого фрагмента проверяй отдельно, может ли он наложиться сам на себя и на сколько символов.
- **Ответ абсурден, и это не замечено.** Больше, чем всего объектов; отрицательный; вероятность больше единицы. **Короткий взгляд на ответ перед тем, как его записать.**

2.10. Задачи: комбинаторика

К каждой задаче сначала задай два вопроса компаса, потом прогони пять ходов из 2.2.

♦ Блок КА — воспроизведение (разминка)

- КА1** Сколько существует четырёхзначных PIN-кодов (цифры 0–9, повторения можно)?
- КА2** Сколькими способами расставить 5 разных книг на полке?
- КА3** Из 10 человек выбрать команду из 3 (без ролей). Сколькими способами?
- КА4** Из 10 человек выбрать старосту и заместителя (две разные роли).
- КА5** Сколькими способами 4 разных приза раздать 4 людям (по одному каждому)?

- КА6 В меню 4 супа и 5 салатов. Сколько вариантов, если берёшь один суп **и** один салат? А если ровно одно блюдо (суп **или** салат)?
- КА7 *(есть в курсе)* В группе 7 новичков и 5 вспоминающих. Команда из 3 новичков и 2 вспоминающих — сколькими способами?
- КА8 Монету бросают 6 раз. Сколько последовательностей содержат хотя бы одного орла?

♦ **Блок KB – распознавание и ограничения (стандартная задача)**

- KB1 7 человек в ряд. Двое конкретных должны сидеть рядом.
- KB2 *(есть в курсе)* 6 человек в ряд. Двое конкретных **не** должны сидеть рядом.
- KB3 8 человек в ряд. Трое конкретных должны сидеть подряд (в любом порядке между собой).
- KB4 *(есть в курсе)* Сколько чисел от 1 до 200 делятся на 3 или на 4?
- KB5 Сколько чисел от 1 до 500 делятся на 2, на 3 или на 7?
- KB6 Сколько существует трёхзначных чисел, все цифры которых различны (первая цифра не 0)?
- KB7 *(есть в курсе)* Сколько четырёхзначных чисел с различными цифрами **нечётны**?
- KB8 4 разные задачи раздают 3 проверяющим, каждому хотя бы одна. Сколькими способами?
- KB9 Сколько слов длины 4 из букв А и В содержат хотя бы одно вхождение `AA`?
- KB10 За круглым столом 6 человек (повороты стола считаем одинаковыми). Сколькими способами их рассадить, если двое конкретных сидят рядом?
- KB11 *(расписание)* Составляют график дежурств на 7 дней: каждый день дежурит либо Аня, либо Боря. Аня не должна дежурить **два дня подряд**. Сколько допустимых графиков?
- KB12 *(маршрут)* Робот идёт из левого нижнего угла в правый верхний, делая 3 шага вправо и 2 шага вверх в каком-то порядке. (а) Сколько всего маршрутов? (б) Сколько маршрутов, в которых он **не делает два шага вверх подряд**?

✖ НАЙДИ ОШИБКУ · КОМБИНАТОРИКА

В каждом решении ровно одна содержательная ошибка. Найди её и **объясни словами**, какое правило нарушено — не «тут неверно», а какое именно.

- ФК1** «Из 10 человек выбрать двоих дежурных (без ролей). На первого 10 кандидатов, на второго 9, итого $10 \cdot 9 = 90$.»
- ФК2** «Сколько чисел от 1 до 30 делятся на 2 или на 3? Кратных двум — 15, кратных трём — 10, итого $15 + 10 = 25$.»
- ФК3** «Сколько трёхзначных чисел с различными цифрами? Цифр десять: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.»
- ФК4** «Сколько слов длины 5 из А и В содержат `АА`? Позиций для `АА` четыре, остальные три буквы свободны: $4 \cdot 2^3 = 32$.»

◆ Блок КС ★ — перенос, параметр, доказательство (экзаменационная задача и выше)

- КС1 ★** Сколько диагоналей у выпуклого n -угольника? (Ответ — формула от n .)
- КС2 ★** Сколько слов длины 6 из букв А и В, в которых ровно 3 буквы А и **нет двух А подряд**?
- КС3 ★** Сколько слов длины 8 из букв А и В не содержат фрагмента `АААА`?
- КС4 ★** 5 человек рассаживают в ряд. Аня не должна быть первой, Боря не должен быть последним. Сколькими способами? (Два запрета, и они пересекаются.)
- КС5 ★** Сколькими способами выбрать 3 числа из $\{1, 2, \dots, 10\}$ так, чтобы никакие два выбранных не были соседними?
- КС6 ★** Сколько слов длины 5 из букв А и В содержат фрагмент `АВ`? (Осторожно: дополнение здесь устроено красивее, чем кажется.)
- КС7 ★** (с параметром) n человек рассаживают в ряд ($n \geq 3$). Сколькими способами, если двое конкретных **не** должны сидеть рядом? **Получи формулу от n** и проверь её на $n = 5$ и $n = 6$.
- КС8 ★** (порядок и сочетание фрагментов) Сколько слов длины 5 из букв А и В содержат **и** фрагмент `АА`, **и** фрагмент `ВВ`? (Подумай, сколько места вообще занимают оба фрагмента в слове длины 5.)

Вероятность: от подсчёта к вероятности

3.1. Зачем это нужно

Вероятность в дискретной модели — это **та же комбинаторика, поделённая сама на себя**. Ты уже умеешь считать числитель и знаменатель; осталось научиться правильно ставить вопрос.

Дальше по курсу вероятность вернётся: на неделе 4 суммы рядов вида $\sum k p q^{k-1}$ окажутся не механикой суммирования, а **математическим ожиданием**. Тот, кто прошёл этот раздел, их узнает. Тот, кто нет, будет зубрить формулу и не поймёт, что считает.

3.2. Короткая база: исходы, событие, вероятность

Пространство элементарных исходов Ω — множество всех элементарных исходов эксперимента. В классической модели, например при броске честного кубика, исходы **равновероятны**, и только тогда вероятность события можно находить по формуле $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$. Бросок кубика: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, шесть исходов.

Событие A — подмножество Ω . «Выпало чётное» — это $\{2, 4, 6\}$.

Классическая вероятность:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{число всех исходов}}$$

⚠ Слово «равновозможны» — не формальность, а условие применимости.
«Завтра или пойдёт дождь, или нет, значит $P = \frac{1}{2}$ » — это не математика, это игра словами: исходы не равновозможны. Без симметрии классическая формула не работает — и это важно уметь объяснить словами.

Три следствия, которые надо знать наизусть:

$$\begin{aligned} 0 \leq P(A) \leq 1, \quad P(\bar{A}) &= 1 - P(A), \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Последнее — **то же включение-исключение**, только поделённое на $|\Omega|$. Ничего нового ты не учишь; ты переиспользуешь Часть 2.

3.3. Разобранные примеры

◆ ПРИМЕР В-1 · КУБИКИ

Бросают два кубика. Вероятность, что сумма равна 7?

$|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$ — кубики различимы, и это важно. Благоприятные: $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$ — 6 исходов.

$$P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Почему кубики различимы: если считать $(1, 6)$ и $(6, 1)$ одним исходом, пропадёт равно-возможность — «две шестёрки» выпадают реже, чем «шестёрка и пятёрка». **Модель сломается тихо, а ответ будет неверным.**

◆ ПРИМЕР В-2 · ВЫБОР БЕЗ ВОЗВРАЩЕНИЯ

Из 10 теоретических вопросов ты знаешь 6. В билете 2 случайных вопроса. Вероятность, что оба знакомы?

Порядок вопросов в билете не важен $\rightarrow$ считаем сочетаниями (компас работает и здесь).

$$|\Omega| = C_{10}^2 = 45, \quad |A| = C_6^2 = 15, \quad P = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

◆ ПРИМЕР В-3 · «ХОТЯ БЫ ОДИН» В ВЕРОЯТНОСТИ

Из 10 задач ты умеешь решать 4. Дают 3 случайные. Вероятность, что хотя бы одну умеешь?

Через дополнение: «ни одной не умею» — все три выбраны из шести задач, которые ты пока не умеешь решать.

$$P(\text{ни одной}) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}, \quad P(\text{хотя бы одна}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Ответ: $\frac{5}{6}$.

Приём «хотя бы один» переехал из комбинаторики без единого изменения. Это не совпадение — это одна и та же математика.

3.4. Условная вероятность и независимость

Условная вероятность $P(A | B)$ — вероятность A , когда уже известно, что B произошло. Смысл: мы сузили Ω до B .

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

Отсюда **правило умножения**: $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$.

Независимость. События независимы, если знание об одном не меняет вероятности другого:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \Longleftrightarrow \quad P(A | B) = P(A)$$

▲ Независимость — это свойство, а не удобство. Её нельзя предположить, потому что «так проще считать». Выбор **без возвращения** независимости не даёт: вытащив белый шар, ты изменил состав урны.

Пример: в урне 3 белых и 2 чёрных, берут 2 шара без возвращения. **Правильно:** $P(\text{оба белых}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} = 0,3$. **«Как независимые»:** $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} = 0,36$. Другое число. **Ошибка не в арифметике, а в модели.** Это худший тип ошибки: она не оставляет следов в вычислениях.

3.5. Полная вероятность и Байес

Формула полной вероятности. Если $H_1, \dots, H_n$ — полная группа несовместных гипотез (что-то из них обязательно произошло, и только одно):

$$P(A) = \sum_i P(H_i) \cdot P(A | H_i)$$

На пальцах: «разбей мир на случаи, посчитай в каждом, взвесь по вероятности случая». **Это правило суммы, только с весами.**

Формула Байеса — переворот условия:

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{P(A)}$$

На пальцах: «мы знали $P(\text{симптом} | \text{болезнь})$, а спрашивают $P(\text{болезнь} | \text{симптом})$. **Это разные вещи**, и переход между ними требует знать, насколько болезнь редкая.»

◆ ПРИМЕР В-4 · САМАЯ ВАЖНАЯ ЗАДАЧА РАЗДЕЛА

Болезнь есть у 1% людей. Тест обнаруживает её у больного в 99% случаев. У здорового тест ошибочно срабатывает в 5% случаев. Тест дал положительный результат. Какова вероятность, что человек болен?

Что замечаем: нам дали $P(+ | \text{болен})$, а спрашивают $P(\text{болен} | +)$. **Условие надо перевернуть, а это Байес.**

Гипотезы: H_1 — болен, $P(H_1) = 0,01$; H_2 — здоров, $P(H_2) = 0,99$.

Шаг 1. Полная вероятность положительного теста.

$$P(+) = \underbrace{0,01 \cdot 0,99}_{\text{болен, тест сработал}} + \underbrace{0,99 \cdot 0,05}_{\text{здоров, ложная тревога}} = 0,0099 + 0,0495 = 0,0594$$

Шаг 2. Байес.

$$P(\text{болен} \mid +) = \frac{0,0099}{0,0594} = \frac{1}{6} \approx 0,167$$

Ответ: $\frac{1}{6}$, около 17%.

Остановись и посмотри на этот ответ. Тест «точен на 99%», результат положительный — и человек болен с вероятностью **одна шестая**. Не 99%.

Почему. Здоровых в 99 раз больше, чем больных. Пять процентов от огромной группы здоровых дают **больше** ложных срабатываний, чем 99% от крошечной группы больных дают верных. **Редкость события — часть условия, и выкинуть её нельзя.**

Это самая частая ошибка мышления в прикладной статистике. Та же арифметика описывает точность классификатора при редком классе — см. задачу ВС2.

◆ ПРИМЕР В-5 · ПОЛНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И ОБРАТНЫЙ ХОД

Две урны. В первой 3 белых и 1 чёрный шар, во второй 1 белый и 3 чёрных. Урну выбирают наугад, из неё берут шар. (а) Вероятность, что шар белый? (б) Шар оказался белым — какова вероятность, что его взяли из первой урны?

(а) Гипотезы: урна 1 или урна 2, каждая с вероятностью $\frac{1}{2}$.

$$P(\text{бел}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

(б) Байес:

$$P(\text{урна 1} \mid \text{бел}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}$$

Ответ: (а) $\frac{1}{2}$; (б) $\frac{3}{4}$.

Проверка на здравый смысл: белый шар — свидетельство в пользу «богатой белыми» урны. Вероятность первой урны обязана **вырасти** с $\frac{1}{2}$ до чего-то большего. Выросла до $\frac{3}{4}$. Логично. Если бы получилось меньше $\frac{1}{2}$ — это был бы сигнал ошибки, ловящийся без всякой формулы.

✎ ДОРЕШАЙ САМ

М-В1

В коробке два кубика: обычный и утяжелённый. У обычного все грани равновероятны. У утяжелённого шестёрка выпадает с вероятностью $\frac{1}{2}$, остальные пять граней делят между собой оставшуюся половину поровну. Кубик берут наугад, бросают — **выпала шестёрка**. Какова вероятность, что кубик был утяжелённый?

Начало: нам дали $P(\text{шестёрка} \mid \text{кубик})$, а спрашивают $P(\text{кубик} \mid \text{шестёрка})$ — **условие надо перевернуть**. Гипотезы: H_1 — утяжелённый, H_2 — обычный, по $\frac{1}{2}$ каждая.

Дальше — ты: выпиши $P(\text{шестёрка} \mid H_1)$ и $P(\text{шестёрка} \mid H_2)$, собери полную вероятность шестёрки, переверни по Байесу. И обязательно проверь ответ на здравый смысл: он должен быть больше $\frac{1}{2}$ — почему?

М-В2

В семье двое детей. Известно, что **хотя бы один из них — мальчик**. Какова вероятность, что оба мальчика?

Начало: выпиши Ω явно, по старшинству: {ММ, МД, ДМ, ДД} — четыре равновероятных исхода.

Дальше — ты: условие «хотя бы один мальчик» вычёркивает из Ω ровно один исход. Какой? Сколько осталось, и сколько из оставшихся благоприятны?

Ответ будет не тем, который подсказывает интуиция, — и в этом весь смысл задачи.

3.6. Мостик вперёд: зачем это на неделе 4

Монету бросают до первого орла. Вероятность, что понадобится ровно k бросков: первые $k - 1$ раз решка, потом орёл, то есть $\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

Проверим, что это вообще распределение: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1$. ✓

А **среднее число бросков** — это уже сумма

$$\sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

и вот она приведёт нас прямоиком в неделю 4, к рядам. **Запомни, что такая сумма имеет смысл.** Когда в модуле 4 тебя попросят найти $\sum kq^k$, ты будешь знать, что считаешь не абстракцию, а среднее время ожидания.

3.7. Задачи: вероятность

◆ Блок ВА — воспроизведение (разминка)

ВА1

Бросают кубик. Вероятность чётного числа?

- BA2 Бросают два кубика. Вероятность, что сумма не меньше 10?
- BA3 Монету бросают 3 раза. Вероятность хотя бы одного орла?
- BA4 В урне 5 белых и 3 чёрных шара. Берут 2. Вероятность, что оба белые?
- BA5 (есть в курсе) Из 10 задач ты умеешь 3. Дают 2 случайные. Вероятность, что хотя бы одну умеешь?

◆ Блок BB — распознавание и перенос (стандартная задача)

- BB1 (есть в курсе) $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$, события независимы. Найди $P(A \cup B)$.
- BB2 (есть в курсе) Бросают два кубика. Известно, что сумма чётная. Какова вероятность, что оба числа чётные?
- BB3 (есть в курсе) Станок А выпускает 60% деталей с браком 2%; станок В — 40% деталей с браком 5%. (а) Вероятность, что случайная деталь бракована? (б) Деталь оказалась бракованной — вероятность, что она со станка А?
- BB4 20% писем — спам. Слово «выигрыш» встречается в 40% спама и в 1% нормальных писем. Письмо содержит это слово. Вероятность, что это спам?
- BB5 В урне 3 белых шара и 1 чёрный. Берут 2 шара без возвращения. Найди $P(\text{оба белых})$. Затем посчитай то же число, **как будто первый шар вернули в урну** (то есть ошибочно предположив независимость), и объясни словами, откуда взялась разница.

✗ НАЙДИ ОШИБКУ · ВЕРОЯТНОСТЬ

- ФВ1 « $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$. Тогда $P(A \cup B) = 0,6 + 0,5 = 1,1$.»
- ФВ2 «Тест на болезнь точен в 99% случаев. У меня положительный результат — значит, я болен с вероятностью 99%.»

◆ Блок ВС ★ — перенос и доказательство (экзаменационная и выше)

- BC1 ★ Три стрелка стреляют независимо; вероятности попадания 0,7; 0,6; 0,5. Вероятность хотя бы одного попадания?
- BC2 ★ Классификатор срабатывает на 90% реальных дефектов и ошибочно тревожит на 2% нормальных объектов. Дефектных объектов 5%. Классификатор поднял тревогу — какова вероятность, что дефект реален?
- BC3 ★ У 5 человек спрашивают, в какой день недели они родились. Какова вероятность, что все пять дней окажутся различными?
- BC4 ★ Монету бросают до первого орла. Выпиши $P(X = k)$ и докажи, что $\sum_{k \geq 1} P(X = k) = 1$.

Асимптотика: кто здесь главный

4

4.1. Зачем это нужно и главная идея

Предел спрашивает: «к какому числу приближается выражение, когда x идёт куда-то — к нулю или к бесконечности?» Почти всегда возникает **неопределённость**: формально получается $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ или 1^∞ , то есть «подставить и посчитать» не выходит.

Главная идея, которая решает большинство задач: найди, какая часть выражения **главная** — что растёт быстрее всех (на бесконечности) или что задаёт поведение около нуля. Остальное — шум, который в пределе исчезает.

Держи в голове один вопрос: **что здесь самое большое, а что мелочь на его фоне?**

4.2. Инструмент 1: иерархия роста (для $x \rightarrow +\infty$)

логарифм $\ll$ степень $\ll$ экспонента

Формально: для любых $a > 0$, $b > 0$ и натурального m имеем $(\ln x)^m = o(x^a)$ и $x^a = o(e^{bx})$. Значок $o(\cdot)$ означает «пренебрежимо мало по сравнению с».

Аналогия: гонка. Логарифм — пешеход, степень — машина, экспонента — ракета. На большом расстоянии ракета оставляет всех позади, кто бы что ни говорил на старте.

Как применять к дробям: найди самый быстрорастущий член в числителе и в знаменателе, **раздели на него всё** — шум превратится в дроби, стремящиеся к нулю.

4.3. Инструмент 2: эквивалентности (для $x \rightarrow 0$)

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

⚠ Самая важная ловушка курса. Эквивалентности можно свободно подставлять в произведениях и дробях. Но в суммах и разностях — **осторожно**: если главные члены сокращаются, первое приближение уже ничего не даёт, и нужен следующий член разложения.

Откуда берутся эти формулы. Эквивалентность — это разложение Тейлора, обрезанное до первого члена: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$, оставили первый член — получили $\sin x \sim x$.

Это одна картина, а не два инструмента. Хватает первого члена — пользуйся эквивалентностью; главные члены сократились — вернись к полному разложению и возьми столько членов, сколько нужно. (Это же готовый ответ на вопрос, почему $\sin x \sim x$.)

4.4. Инструмент 3: разложения Тейлора

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5), & \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), & \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2), & \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\end{aligned}$$

Зубрить таблицу наизусть не нужно — **пользоваться ею надо уметь руками**. Тейлор — это «эквивалентность с продолжением»: столько членов, сколько нужно, чтобы после сокращения остался ненулевой.

4.5. Инструмент 4: рационализация

Разность корней домножают на сопряжённое, чтобы убрать корни из опасного места:

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

4.6. Разобранные примеры

◆ ПРИМЕР L-1 · МАКСИМАЛЬНО ПОДРОБНО: ДРОБЬ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^4 - 3x^2 + 1}{2x^4 + 5x - 10}$$

Шаг 1. Куда идёт x ? $K + \infty$, значит работает иерархия роста.

Шаг 2. Какая неопределённость? И числитель, и знаменатель стремятся к бесконечности. Это $\frac{\infty}{\infty}$ — «в лоб» нельзя.

Шаг 3. Кто главный? Старшая степень и вверху, и внизу — x^4 . На её фоне x^2 , x и константы пренебрежимо малы.

Шаг 4. Делим всё на главный член x^4 :

$$\frac{7 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{2 + \frac{5}{x^3} - \frac{10}{x^4}} \longrightarrow \frac{7}{2}$$

При $x \rightarrow +\infty$ каждая дробь с x в знаменателе стремится к нулю.

Ответ: $\frac{7}{2}$.

Общий образец: у дроби многочленов на бесконечности при равных старших степенях предел равен отношению старших коэффициентов.

◆ **ПРИМЕР L-2 · МАКСИМАЛЬНО ПОДРОБНО: ЛОВУШКА СОКРАЩЕНИЯ**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3x \cos x}{x^3}$$

Шаг 1. Подставим $x = 0$: числитель 0, знаменатель 0. Неопределённость $\frac{0}{0}$.

Шаг 2. Первая попытка — эквивалентности. $\sin 3x \sim 3x$, $\cos x \rightarrow 1$. Тогда числитель $\approx 3x - 3x = 0$.

Главные члены сократились. Это сигнал: первого приближения не хватает, нужен следующий член.

Шаг 3. Берём разложения аккуратнее.

$$\begin{aligned}\sin 3x &= 3x - \frac{(3x)^3}{6} + o(x^3) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3) \\ 3x \cos x &= 3x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = 3x - \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

Шаг 4. Вычитаем:

$$\left(3x - \frac{9}{2}x^3\right) - \left(3x - \frac{3}{2}x^3\right) + o(x^3) = -3x^3 + o(x^3)$$

Члены $3x$ ушли — ровно как мы и предсказали. Остался $-3x^3$.

Шаг 5. Делим на x^3 : $\frac{-3x^3 + o(x^3)}{x^3} \rightarrow -3$.

Ответ: -3 .

Мораль: увидел, что при подстановке эквивалентностей числитель обнулится, — **не паникуй, а бери следующий член**. Это не тупик, это указание.

◆ **ПРИМЕР L-3 · РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x \right)$$

Это $\infty - \infty$. Домножаем и делим на сопряжённое $\sqrt{x^2 + 3x} + x$:

$$\sqrt{x^2 + 3x} - x = \frac{(x^2 + 3x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x} + x} = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}$$

Выносим x из корня. При $x \rightarrow +\infty$: $\sqrt{x^2 + 3x} = x\sqrt{1 + 3/x}$.

$$\frac{3x}{x\sqrt{1+3/x}+x} = \frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1} \rightarrow \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

⚠ Осторожно с выносом из-под корня: $\sqrt{x^2} = |x|$. При $x \rightarrow +\infty$ это x , а при $x \rightarrow -\infty$ было бы $-x$. **Знак — не мелочь.**

◆ ПРИМЕР L-4 · ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ДРОБИ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\ln(1 + x^2)}$$

Числитель и знаменатель стоят **по отдельности** (не внутри разности), значит эквивалентности подставляем свободно:

$$1 - \cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2, \quad \ln(1 + x^2) \sim x^2$$

$$\frac{2x^2}{x^2} = 2$$

Ответ: 2.

◆ ПРИМЕР L-5 · ЛОГАРИФМЫ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 \ln^2 x + 7x \ln x - 1}{8x^2 \ln^2 x - 3x^2 + 5}$$

Главный член — $x^2 \ln^2 x$ (степень, умноженная на логарифм, — самое быстрое из присутствующего). Делим на него всё:

$$\frac{7x \ln x}{x^2 \ln^2 x} = \frac{7}{x \ln x} \rightarrow 0, \quad \frac{3x^2}{x^2 \ln^2 x} = \frac{3}{\ln^2 x} \rightarrow 0$$

Остается $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

◆ ЧАСТЬ 5

Малый параметр и порядок Тейлора

5

5.1. Зачем этот раздел существует

До сих пор ты выбирал **формулу**. Теперь научишься выбирать **порядок**.

Разница видна на одном примере. Задача

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

не решается **никакой формулой** из таблицы. Она решается ответом на вопрос: *сколько членов разложения мне нужно взять, чтобы после сокращения осталось что-то ненулевое?*

Это и есть настоящий навык асимптотики. **Формулу можно найти в справочнике; порядок — нет.**

5.2. Протокол: восемь шагов

1. **Найди малый параметр.** Если $x \rightarrow 0$ — он уже есть, это x . Если $x \rightarrow \infty$ — **сделай замену** $t = 1/x$: тогда $t \rightarrow 0$, и вся техника нуля становится доступной.
2. **Вынеси главную степень** из корней и скобок: $\sqrt{x^2 + 3x} = x\sqrt{1 + 3/x} = x\sqrt{1 + 3t}$.
3. **Оцени порядок каждого слагаемого** по малому параметру: это t , t^2 или t^3 ?
4. **Посмотри на знаменатель и внешний множитель** — они говорят, до какого порядка раскладывать. *Знаменатель $x^3 \rightarrow$ числитель нужен с точностью до x^3 .*
5. **Разложи ровно до нужного порядка**, не дальше. Лишние члены — лишние шансы ошибиться.
6. **Проверь: не сократились ли главные члены?** Если да — **бери следующий член**.
7. **Сократилось снова — бери ещё следующий.** Столько раз, сколько понадобится. Это нормальный ход событий, а не признак ошибки.
8. **Проверь порядок ответа до вычисления коэффициента.** Числитель порядка x^3 и знаменатель $x^3 \rightarrow$ предел конечный и ненулевой. Числитель x^4 , знаменатель $x^3 \rightarrow$ предел ноль. **Это видно без единого коэффициента.**

◆ ПРИМЕР М-1 · ЗАМЕНА $x \rightarrow \infty$ НА МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$$

Что замечаем: внешний множитель $x \rightarrow \infty$ умножает скобку, которая стремится к нулю. Это $\infty \cdot 0$ — значит, **важно, насколько быстро скобка стремится к нулю.**

Ход 1 (рационализация — уже умеем):

$$x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + 1/x^2} + 1 \right)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Ход 2 (малый параметр — учимся). Пусть $t = 1/x$, $t \rightarrow 0^+$, тогда $x = 1/t$.

Выносим главную степень (шаг 2):

$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1} = \frac{1}{t} \sqrt{1 + t^2}$$

$$x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t} \sqrt{1 + t^2} - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{t^2} \left(\sqrt{1 + t^2} - 1 \right)$$

Смотрим на порядок (шаг 4): знаменатель t^2 , значит числитель нужен с точностью до t^2 .

$$\sqrt{1 + t^2} = (1 + t^2)^{1/2} = 1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \implies \sqrt{1 + t^2} - 1 = \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$\frac{1}{t^2} \cdot \frac{t^2}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Зачем второй ход, если первый короче? Потому что рационализация работает **только с корнями**, а замена $t = 1/x$ — **со всем**: логарифмы, экспоненты, тригонометрия от $1/x$. Это твой универсальный инструмент; рационализация — его частный случай.

◆ ПРИМЕР М-2 · КОРЕНЬ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ: РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ НЕ ПОМОЖЕТ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x \right)$$

Сопряжённое для кубического корня — громоздкая трёхэтажная конструкция. **Малый параметр решает за три строки.**

Выносим главную степень: $\sqrt[3]{x^3 + x^2} = x \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} = x(1 + t)^{1/3}$, где $t = 1/x$.

$$x(1 + t)^{1/3} - x = x \left[(1 + t)^{1/3} - 1 \right] = \frac{1}{t} \left[(1 + t)^{1/3} - 1 \right]$$

Внешний множитель $\frac{1}{t}$ растёт как t^{-1} , значит скобку надо разложить до первого порядка по t . Этого хватит, больше не нужно.

$$(1 + t)^{1/3} = 1 + \frac{t}{3} + o(t) \implies \frac{1}{t} \left(\frac{t}{3} + o(t) \right) \longrightarrow \frac{1}{3}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Шаг 8 в действии: мы поняли, что нужен ровно первый порядок, **ещё до того как раскладывали**. Внешний множитель t^{-1} съедает ровно один порядок.

◆ ПРИМЕР М-3 · СКОЛЬКО ЧЛЕНОВ БРАТЬ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$$

Что замечаем: из e^x **вычли ровно первые три члена его собственного разложения**. Это не случайность, а подсказка, встроенная в условие.

Знаменатель x^3 , значит числитель нужен до x^3 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\frac{x^3/6}{x^3} \longrightarrow \frac{1}{6}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Читай условие как инструкцию. Если из функции вычли первые k членов её разложения — ответ живёт в члене номер $k + 1$, и раскладывать надо ровно до него. **Условие само сказало тебе порядок**, надо только услышать.

◆ ПРИМЕР М-4 · СОКРАЩЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

Первая попытка (эквивалентности): $\tan x \sim x$, $\sin x \sim x \rightarrow$ числитель $\approx x - x = 0$. Сократилось. **Берём следующий порядок.**

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\tan x - \sin x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$\frac{x^3/2}{x^3} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Подводный камень, ради которого этот пример здесь. Соблазн: « $\tan x \sim x$ и $\sin x \sim x$, значит числитель $\sim x - x = 0$, ответ 0». **Это неверный ответ**, и неверен он не арифметически, а методологически: **эквивалентности первого порядка нельзя подставлять в разность**. Запомни этот случай как прививку.

◆ ПРИМЕР М-4б · А ЕСЛИ СОКРАТИЛОСЬ ДВАЖДЫ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x - \frac{x^3}{6}}{x^5}$$

Что замечаем: знаменатель x^5 — уже подозрительно высокий порядок. Но пойдём честно, по протоколу, как будто мы этого не заметили.

Попытка 1 (первый порядок). $\sin x \sim x$, значит $x - \sin x \approx 0$, и вместе с $-\frac{x^3}{6}$ числитель $\approx -\frac{x^3}{6}$... Стоп: **сначала сократился первый порядок.** Идём глубже.

Попытка 2 (третий порядок). Берём $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$:

$$x - \sin x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$x - \sin x - \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = o(x^3)$$

Сократилось во второй раз! Числитель обнулился снова — теперь уже в третьем порядке. Всё, что мы узнали: он мельче x^3 . Этого мало: делить на x^5 мы пока не можем.

Попытка 3 (пятый порядок). Не сдаёмся, берём следующий член:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$x - \sin x - \frac{x^3}{6} = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} \right) - \frac{x^3}{6} + o(x^5) = -\frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

$$\frac{-x^5/120}{x^5} \longrightarrow -\frac{1}{120}$$

Ответ: $-\frac{1}{120}$.

Что здесь важно.

1. **Сокращение может повториться.** Это не признак того, что ты ошибся, — это признак того, что задача так устроена. Спокойно берёшь следующий член. Столько раз, сколько нужно.
2. **Знаменатель был подсказкой всё это время.** x^5 означал: «ответ живёт в пятом порядке». Если бы ты прочитал знаменатель сразу (шаг 4 протокола), то сэкономил бы две попытки и раскладывал бы $\sin x$ до x^5 с самого начала.
3. У $\sin x$ нет чётных членов, поэтому «следующий» после x^3 — это сразу x^5 , а не x^4 . **Смотри на структуру функции, а не считай порядки механически.**

Правило: сколько членов вычитается в числителе, столько порядков и раскладывай.

◆ ПРИМЕР М-5 · ВНЕШНИЙ МНОЖИТЕЛЬ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right)$$

Замена $t = 1/x, t \rightarrow 0^+$:

$$\frac{1}{t^3} (\sin t - t)$$

Внешний множитель $t^{-3} \rightarrow$ нужен порядок t^3 . Не второй, не пятый — ровно третий. Это решено до всякого раскладывания.

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \implies \sin t - t = -\frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

$$\frac{1}{t^3} \cdot \left(-\frac{t^3}{6} \right) \longrightarrow -\frac{1}{6}$$

Ответ: $-\frac{1}{6}$.

Наивный ход: « $\sin t \sim t$, значит скобка почти ноль, предел 0». Опять та же ошибка — разность плюс эквивалентность. И опять её ловит **один вопрос: какой порядок мне нужен?**

◆ ПРИМЕР М-6 · СИММЕТРИЧЕСКИЕ КОМБИНАЦИИ

Иногда выражение имеет вид $F(t) + F(-t)$ или $F(t) - F(-t)$. Это не экзотика, а **очень удобный случай** — и вот почему.

Запишем разложение: $F(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 + \dots$ Тогда

$$F(-t) = c_0 - c_1t + c_2t^2 - c_3t^3 + \dots$$

Сумма убивает все нечётные члены. Разность — все чётные.

$$F(t) + F(-t) = 2c_0 + 2c_2t^2 + 2c_4t^4 + \dots$$

$$F(t) - F(-t) = 2c_1t + 2c_3t^3 + 2c_5t^5 + \dots$$

Пример (а):

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t + e^{-t} - 2}{t^2}$$

Сумма $\rightarrow$ выживают чётные: $e^t + e^{-t} = 2 + t^2 + \frac{t^4}{12} + \dots$, вычли 2 $\rightarrow$ остаётся $t^2 + o(t^2)$. **Ответ:** 1.

Пример (б):

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^{-t} - 2t}{t^3}$$

Разность $\rightarrow$ выживают нечётные: $e^t - e^{-t} = 2t + \frac{t^3}{3} + \dots$, вычли $2t \rightarrow$ остаётся $\frac{t^3}{3} + o(t^3)$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

Что тут ценного — не формула, а предсказание. Увидев симметрическую сумму, ты **заранее знаешь**, что все нечётные члены исчезнут, — и не тратишь время на их выписывание. Это шаг 8 протокола: понять структуру ответа до вычисления коэффициентов.

Бонус для тех, кто пойдёт дальше: $\frac{f(x) + f(-x) - 2f(0)}{x^2} \rightarrow f''(0)$. Ты только что вывел симметричную разностную формулу второй производной — ту самую, которой численно дифференцируют в вычислительных пакетах.

◆ **ПРИМЕР М-7 · НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЬ 1^∞**

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}$$

Основание стремится к 1, показатель — к бесконечности. Это 1^∞ , и «в лоб» нельзя: ни 1, ни ∞ не ответ. (Если сомневаешься, что это настоящая неопределённость, вспомни: $(1 + \frac{1}{n})^n \rightarrow e$, а вовсе не к единице.)

Стандартный ход: прологарифмировать. Пусть $y = (\cos x)^{1/x^2}$, тогда

$$\ln y = \frac{\ln \cos x}{x^2}$$

Считаем предел логарифма. Запишем $\ln \cos x = \ln(1 + (\cos x - 1))$, где $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$, и воспользуемся $\ln(1 + u) \sim u$ при $u \rightarrow 0$:

$$\ln \cos x \sim -\frac{x^2}{2} \implies \ln y \rightarrow \frac{-x^2/2}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Возвращаемся: $y \rightarrow e^{-1/2}$.

Ответ: $e^{-1/2}$.

Образец, работающий всегда: любой $1^\infty \rightarrow$ логарифмируй $\rightarrow$ найди предел логарифма $\rightarrow$ возведи e в него.

◆ **ПРИМЕР М-8 · КОМПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ ★**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{x^3}$$

Что замечаем: обе экспоненты стремятся к 1, их разность — к нулю; знаменатель x^3 . Раскладывать каждую композицию по отдельности до x^3 можно, но долго и грязно.

Умный ход: вынести общий множитель.

$$e^{\sin x} - e^{\tan x} = e^{\sin x} (1 - e^{\tan x - \sin x})$$

Первый множитель стремится к 1 — его можно смело заменить на единицу. Во втором:

$$\tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

— это мы уже посчитали в М-4, задача переиспользована целиком. И $1 - e^u \sim -u$ при $u \rightarrow 0$:

$$1 - e^{\tan x - \sin x} \sim -\frac{x^3}{2}$$

$$\frac{1 \cdot (-x^3/2)}{x^3} \longrightarrow -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

Что тут важнее ответа: **разность экспонент раскладывают не покомпонентно, а вынося общий множитель.** Тот же приём работает для разности логарифмов (через $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$) и разности степеней.

 ДОРЕШАЙ САМ

МП1

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 7x} - x\right)}{7x}$ Начало: это $\infty - \infty$, домножаем на сопряжённое:
 $\frac{\sqrt{x^2 + 7x} + x}{\sqrt{x^2 + 7x} - x}$. Дальше решаешь ты: какую степень выносим из корня и что происходит с дробью?

МП2

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1 - 3x}{x^2}$ Начало: знаменатель $x^2 \rightarrow$ числитель нужен с точностью до x^2 , не больше и не меньше. Дальше решаешь ты: выпиши разложение e^{3x} ровно до нужного порядка и посмотри, что осталось после вычитания. Осторожно с коэффициентом внутри.

МП3

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\cos \frac{1}{x} - 1 \right)$ Начало: замена $t = 1/x$ превращает выражение в $\frac{\cos t - 1}{t^2}$. Дальше решаешь ты: какой порядок нужен — и почему знак ответа отрицательный ещё до всяких вычислений?

5.3. Когда не так гладко

- Подставили эквивалентность в разность и не заметили сокращения. Числитель обнулился → бери следующий член (L-2, M-4, M-5).
- Сдались после второго сокращения. Оно бывает (M-4b). Это не ошибка, это структура задачи.
- Потеряли коэффициент внутри функции: $\sin 3x \sim 3x$, а не x . Коэффициент не исчезает.
- Взяли слишком мало членов. Признак: получился ноль там, где ноля быть не должно.
- Взяли слишком много членов. Не ошибка, но лишний риск арифметики. Порядок определяется знаменателем и внешним множителем — посчитай его сначала.
- Забыли про сторону подхода. $\sqrt{x^2} = |x|$, а не x . При $x \rightarrow -\infty$ знак меняется.
- Схватились за Лопиталья сразу. Можно, но часто длиннее. Сначала спроси: виден ли главный член или порядок?

5.4. Задачи: пределы

♦ Блок А — воспроизведение (разминка)

- A1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 2x + 1}{10x^3 + x^2 - 7}$ (аналог L-1)
- A2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$
- A3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$
- A4 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
- A5 (есть в курсе) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$ (аналог L-3)
- A6 (есть в курсе) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 \ln^2 x + 5x \ln x + 2}{2x^2 \ln^2 x - 7x^2 + 1}$ (аналог L-5)
- A7 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2}$ (аналог M-3)
- A8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x \cos x}{x^3}$ (аналог L-2)
- A9 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$
- A10 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/x}$

♦ Блок В — распознавание и перенос (стандартная задача)

- B1 (есть в курсе) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x) - 2 \sin x}{x^2}$

- B2** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - 1 - 5x}{x^2}$
- B3** $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right)$
- B4** (есть в курсе) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\ln(1+x^2)}$
- B5** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{x^2}$
- B6** (есть в курсе) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2}$
- B7** (есть в курсе) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\sin \frac{3}{x} - \frac{3}{x} \right)$
- B8** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x \right)$

✖ **НАЙДИ ОШИБКУ · ПРЕДЕЛЫ**

- ФП1** « $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$: так как $\ln(1+x) \sim x$, числитель $\sim x - x = 0$, значит предел равен 0.»
- ФП2** « $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$: так как $\sin x \sim x$, предел равен 1.»
- ФП3** « $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 4x} - x \right)$: при больших x имеем $\sqrt{x^2 + 4x} \approx x$, значит предел равен 0.»
- ФП4** « $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right)$: так как $\sin t \sim t$, скобка обращается в ноль, значит и предел равен 0.»

◆ **Блок С ★ – порядок, композиция, перенос (экзаменационная и выше)**

- C1 ★** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$
- C2 ★** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2}$
- C3 ★** $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$
- C4 ★** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$
- C5 ★** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan x) - \ln(1 + \sin x)}{x^3}$
- C6 ★** $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} \right)$

Разбор публичной задачи открытого варианта

Ниже разобрана задача из **публичного демонстрационного варианта** — того, что открыто выложен и доступен всем. Мы разбираем её не потому, что «такая будет», а потому что она показывает **уровень записи и логику**: страшный внешний вид, простой скелет. Закрытые формулировки и привязку к позициям варианта мы не переносим — работаем только с официальной программой и публичными материалами.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^3 \ln^3(x^4) - 12x^2 \ln^2(x^4) + 100x \ln(x^4) + 10}{50x^3 \ln^3(x^4) + 100x^2 \ln^2(x^4) - 32x \ln(x^4) + 1}$$

Что замечаем в условии. Ужасает не математика, а количество символов. Первый вопрос: **есть ли здесь вообще что-то, кроме иерархии роста?**

Шаг 1. Упрощаем обозначения. Пусть $L = \ln(x^4) \rightarrow +\infty$.

Заметь: **раскрывать $\ln(x^4) = 4 \ln x$ не нужно.** Коэффициент 4 сократится вместе со всем остальным — это лишняя работа и лишний шанс ошибиться.

Шаг 2. Кто главный? Вверху главный член $10x^3 L^3$, внизу $50x^3 L^3$. Все остальные слагаемые содержат меньшие степени и x , и L — это шум.

Шаг 3. Делим всё на $x^3 L^3$:

$$\frac{10 - \frac{12}{xL} + \frac{100}{x^2 L^2} + \frac{10}{x^3 L^3}}{50 + \frac{100}{xL} - \frac{32}{x^2 L^2} + \frac{1}{x^3 L^3}} \longrightarrow \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Что тут важно. Не понадобился ни Лопиталь (трижды дифференцировать этого монстра — верный способ надолго увязнуть), ни раскрытие логарифма. Понадобился **один вопрос: кто главный.**

Это и есть навык, а не удача. **Внешняя сложность задачи почти никогда не равна её настоящей сложности** — и умение это различать стоит на экзамене больше, чем любая формула.

Мостик к неделе 2: вектор — это просто набор чисел

7

Короткое чтение и шесть задач. Нового метода тут нет.

На следующей неделе начинается линейная алгебра: ранг, метод Гаусса, собственные значения, а дальше — подпространства и базисы. Звучит как другой язык. **Это не другой язык, и вот доказательство.**

Скажу честно, зачем этот мостик существует. Неделя 2 — самое частое место, где взрослый человек, вернувшийся к математике, тихо решает, что «это не для него». Не потому, что линейная алгебра трудная, а потому, что она начинается со слов, которых он не слышал двадцать лет. **Короткий мостик заранее снимает этот эффект.**

7.1. Вектор

Вектор — это упорядоченный набор чисел. Всё.

$$v = (1, 2, 3)$$

Три числа, записанные по порядку. Это вектор из $\mathbb{R}^3$ — «трёхмерного пространства», что означает ровно одно: **в наборе три числа**. Вектор $(1, 1, 4, 3)$ живёт в $\mathbb{R}^4$ — там четыре числа, и никакой мистики в «четвёртом измерении» нет.

Векторы складывают покомпонентно и умножают на число покомпонентно:

$$(1, 2, 3) + (4, 0, 1) = (5, 2, 4), \quad 3 \cdot (1, 2, 3) = (3, 6, 9)$$

Это две базовые операции, которые понадобятся нам на старте. *(И, забегаая вперёд: любой набор объектов, который можно так складывать и так умножать на числа, математики называют векторным пространством — даже если это не «стрелочки». На неделе 2 ты увидишь, что многочлены и матрицы ведут себя точно так же.)*

7.2. Линейная комбинация: «собрать вектор из других»

Линейная комбинация — это «взять несколько векторов с коэффициентами и сложить»:

$$2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1) = (2, 3)$$

Вектор $(2, 3)$ **собран** из $(1, 0)$ и $(0, 1)$.

Теперь главное понятие всей недели 2, и оно простое:

Векторы $v_1, \dots, v_k$ линейно зависимы, если существуют коэффициенты $c_1, \dots, c_k$, не все равные нулю, для которых $c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0$. Иными словами, один из векторов не добавляет нового направления — его можно выразить через остальные.

Если ни один не собирается из других — они независимы.

Пример. $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 4, 2)$, $v_3 = (1, 1, 0)$.

Заметь: $v_2 = 2 \cdot v_1$. Второй вектор — просто удвоенный первый, он **не новый**. Вектор $v_2 = 2v_1$, поэтому он не добавляет нового направления. Вектор v_3 не пропорционален v_1 , следовательно, v_1 и v_3 линейно независимы. Ранг системы равен 2.

Число по-настоящему независимых векторов в наборе называется рангом. Это и есть первая тема недели 2. Ты уже понимаешь, что это такое, — осталось научиться находить ранг руками, когда зависимость не видна с первого взгляда (а она почти никогда не видна).

7.3. Матрица

Матрица — таблица чисел. Её строки удобно воспринимать как векторы, сложенные стопкой:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Это те же три вектора из примера выше, просто записанные вместе. **Ранг матрицы — максимальное число линейно независимых строк.** Вторая строка равна удвоенной первой, поэтому ранг не больше 2. Третья строка не пропорциональна первой, значит первая и третья строки линейно независимы. Следовательно, ранг матрицы равен 2.

Это была задача Д5 из диагностики. Если на диагностике ты поставил там прочерк — посмотри на неё ещё раз сейчас. Скорее всего, ты её теперь видишь.

7.4. Система уравнений — это тоже матрица

Система

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

полностью описывается таблицей коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса, который ты выучишь на неделе 2, — это **аккуратный способ упрощать такую таблицу, не меняя множества решений**. Никакой магии: школьное «вычтем из второго уравнения удвоенное первое», записанное дисциплинированно.

Одно наблюдение на будущее. Такая система (справа нули) называется однородной. Если u и v — два её решения, то $u + v$ — тоже решение, и $3u$ — тоже решение. **Проверь это на бумаге, это две строки.** Множество решений замкнуто относительно сложения и умножения на число — то есть ведёт себя как векторное пространство. В следующем модуле у этого наблюдения появится имя (**подпространство**), но само наблюдение ты сделаешь сам.

7.5. Задачи Ч (мостик)

Разминка. Каждая задача — две-три строки.

- Ч1 Даны $u = (1, 2, 0)$ и $v = (3, -1, 2)$. Найди $2u + v$ и $u - 2v$.
- Ч2 Является ли вектор $(4, 4, 4)$ линейной комбинацией векторов $(1, 1, 1)$ и $(2, 2, 2)$? Если да — предъяви коэффициенты. (Их будет не один набор. Почему?)
- Ч3 (есть в курсе) Векторы $(1, 3)$, $(2, 6)$, $(0, 5)$. Какие из них «не новые», то есть собираются из других? Сколько среди них независимых?
- Ч4 Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найди **на глаз**, без всяких методов, сколько у неё независимых строк, и объясни словами, как ты это увидел.
- Ч5 Проверь прямой подстановкой, что $(7, -3, 1)$ — решение системы

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

Затем проверь, что $(14, -6, 2)$ — тоже решение. **Почему это можно было предсказать, не подставляя?**

- Ч6 Пусть u и v — два решения однородной системы (справа нули). Докажи в две строки, что $u + v$ — тоже решение. (Подставь сумму в уравнение и раскрой скобки. Это и есть то самое наблюдение из 7.4 — а заодно твой первый в курсе настоящий, пусть и крошечный, доказательный текст.)

Холодный набор Н1–Н6

Правила.

1. **Темы не подписаны** — это главное. На экзамене их тоже никто не подпишет.
2. Сначала прочитай все шесть и реши, в каком порядке брать. Отметь две, которые взял бы первыми. **Это тренировка триажа, и она ценнее решений.**
3. Потом решай — в своём порядке.
4. Задача не пошла — **бросай** и иди дальше. Вернёшься, если останется время. Это стратегия, а не поражение.
5. Если хочешь, засеки время на весь набор сам.

Н1 Сколько существует пятизначных чисел с различными цифрами, являющихся нечётными?

Н2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x^2}$

Н3 (есть в курсе) В группе 12 человек, пятеро из них знают Python. Выбирают троих наугад. Какова вероятность, что ровно двое из выбранных знают Python?

Н4 Сколько слов длины 6 из букв А, В, С, в которых никакие две соседние буквы не совпадают?

Н5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$

Н6 За круглым столом 8 человек (повороты стола считаем одинаковыми). Сколькими способами их рассадить, если двое конкретных **не** должны сидеть рядом?

После набора посчитай честно: сколько взял, сколько бросил, на чём потерял время, где ошибся в выборе порядка. **Этот подсчёт ценнее самих решений.**

Теоретический минимум

Во многих программах есть устная часть: там обсуждают теорию и письменные решения. Формат уточни на странице приёмной кампании. **Готовимся дёшево: каждую неделю несколько определений «на пальцах».**

Формулировать **вслух**, своими словами, коротко, без бумаги. Записывать себя на диктофон — самый дешёвый способ услышать, где ты плаваешь.

Т-1. Что значит $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$? «Значения $f(x)$ можно сделать сколь угодно близкими к A , если брать x достаточно близко к a , но не равным a .»

Т-2. Что значит $f \sim g$ при $x \rightarrow a$? Почему эквивалентность нельзя подставлять в разность? «Их отношение стремится к единице: около точки они одинаковы в первом приближении. В разности первые приближения могут сократиться — и тогда весь ответ сидит в следующем члене, который эквивалентность выбросила.»

Т-3. Почему логарифм растёт медленнее любой степени? «Как ни мала степень x^a , начиная с некоторого момента она обгоняет $\ln x$ и уходит в отрыв. Логарифм — пешеход, степень — машина.»

Т-4. Чем сочетания отличаются от размещений? «В размещениях порядок важен (есть роли или места), в сочетаниях — нет. $C_n^k = A_n^k/k!$, потому что каждую группу в размещениях посчитали $k!$ раз.»

Т-5. Что такое классическая вероятность и когда ею нельзя пользоваться? «Отношение числа благоприятных исходов к числу всех — при условии, что исходы равновозможны. Без симметрии формула не работает: "или дождь, или нет" не даёт одну вторую.»

Т-6. Что такое условная вероятность и независимость? Почему $P(A | B)$ и $P(B | A)$ — разные вещи? « $P(A | B)$ — вероятность A в сузившемся мире, где B уже случилось. Независимость: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, и это свойство, а не удобство. Перевернуть условие можно только через Байеса, и там обязательно участвует, насколько редким было событие.»

★ **Т-7. Формула включений-исключений для трёх множеств: сформулируй и объясни, откуда берутся знаки.** «Элемент, лежащий ровно в двух множествах, посчитан дважды — вычитаем попарные пересечения. Но элемент из всех трёх после этого посчитан ноль раз — возвращаем его плюсом.»

По желанию проговори вслух одно своё решение — себе или другому человеку. Объяснять решение словами — прямая тренировка устной части.

♦ **ЧАСТЬ 10**

Правило, которое дороже любого метода

10.1. Не оставляй белый лист

По каждой задаче пиши **всё, что, на твой взгляд, связано с темой**: тип задачи, определения, первый ход, идеи — **даже незавершённые**. Записанный ход рассуждения показывает понимание, даже если до ответа ты не дошёл. Как оценивается неполное решение, определяют правила приёмной кампании — уточни на её странице.

10.2. Как выглядит содержательное продвижение

Даже если не дошёл предел до числа, запись

«Неопределённость $\frac{0}{0}$. Первое приближение: $\sin 3x \sim 3x$, $\cos x \rightarrow 1$ — главные члены сократились. Значит, первого порядка не хватает: раскладываю $\sin 3x$ и $3x \cos x$ до x^3 .»

— это **показанное понимание**, а не «ничего не решил». Ты назвал тему, обосновал первый ход, объяснил, **почему очевидный путь не работает**, и указал следующий шаг.

То же в комбинаторике:

«Ограничение "рядом" $\rightarrow$ склейка. Но у двух условий общий элемент, значит блоки не независимы: сначала определяю, какую конструкцию они вынуждают.»

10.3. Тренировка частичных баллов

На любой задаче, которая «не идёт», выполни пять пунктов **письменно** — и только потом сдавайся:

1. **Определи тему.** О чём это вообще? («Это подсчёт с ограничением», «это разность близких функций».)
2. **Выпиши определения и известные факты.** Формулу, теорему, соотношение.
3. **Сформулируй первый содержательный ход.** Не «попробую что-нибудь», а «склеиваю в блок, потому что...».
4. **Получи промежуточный результат.** Хоть один, пусть частичный.
5. **Укажи, чего не хватает до полного решения.** Честно: «остаётся посчитать внутренние порядки блока».

Попробуй: возьми любую задачу из блока КС или С, которую ты **не решил**, и проделай на ней эти пять пунктов.

♦ ЧАСТЬ 11

Карта шаткости и чек-лист

11

11.1. Карта шаткости недели 1

Заполни **честно** — для себя. Карта никуда не отправляется: она показывает, к чему вернуться в первую очередь.

Уровни: **0** не узнаю · **1** узнаю, но не знаю первого шага · **2** решаю с подсказкой · **3** решаю холодно и оформляю.

ТИП ЗАДАЧИ	РАЗДЕЛ	МОЙ УРОВЕНЬ (0–3)
Базовый подсчёт: сочетания, размещения, правила суммы и произведения	1.3–1.4	☐
Приём «хотя бы один» через дополнение	1.5	☐
Несколько ограничений: склейка блоков	2.3	☐
Блоки с общим элементом	2.4	☐
Разбиение на случаи при особом элементе	2.5	☐
Включения-исключения	2.6	☐
Наложения и повторный счёт	2.7	☐
Узнаю ту же структуру в другом контексте (расписание, маршрут, код)	2.7	☐
★ Подсчёт по состояниям	2.8	☐
Классическая вероятность	3.2–3.3	☐
Условная вероятность и независимость	3.4	☐
Полная вероятность и Байес	3.5	☐
Иерархия роста, главный член	4.2	☐
Эквивалентности и разложение Тейлора	4.3–4.4	☐
Рационализация, корни на бесконечности	4.5	☐
Выбор малого параметра ($t = 1/x$, вынос главной степени)	5.2	☐
Выбор порядка Тейлора (сколько членов брать)	5.2	☐
Повторное сокращение (сократилось дважды — не сдался)	M-4b	☐
Симметрические комбинации $F(t) \pm F(-t)$	M-6	☐
Неопределённость 1^∞	M-7	☐

ТИП ЗАДАЧИ	РАЗДЕЛ	МОЙ УРОВЕНЬ (0–3)
Язык векторов: линейная комбинация, зависимость	7.1–7.2	☐
Первый содержательный шаг в задаче, которую не дорешал	10.3	☐

Правила честности. «Я понял разбор» — это не 3, в лучшем случае 1–2. «Решил, подглядев формулу» — это 2. Ставить 0 не стыдно. **Стыдно поставить 3 там, где 2, и не вернуться к теме.** Карта нужна только тебе.

11.2. Чек-лист недели

- ☐ Прошёл диагностику, понял свою стартовую карту
- ☐ Для любой задачи на подсчёт задаю два вопроса компаса: важен ли порядок, есть ли повторения
- ☐ Знаю пять ходов при ограничении: склейка / случаи / дополнение / включения-исключения / **проверка повторного счёта**
- ☐ Проверяю общий элемент **до** склейки блоков (пример О-3)
- ☐ Последним действием любой комбинаторной задачи спрашиваю: «не посчитан ли один объект дважды?»
- ☐ Понимаю, что фрагменты умеют накладываться, и проверяю, **на сколько символов** (пример О-8)
- ☐ Узнаю ту же структуру в другом костюме: расписание, маршрут, код (KB11, KB12)
- ☐ Решил KA1–KA8 и KB1–KB4
- ☐ Умею считать классическую вероятность и знаю, **когда формула не работает**
- ☐ Понимаю, почему «тест точен на 99%» не значит «я болен с вероятностью 99%» (пример В-4)
- ☐ Понимаю иерархию роста: логарифм $\ll$ степень $\ll$ экспонента
- ☐ Знаю замену $t = 1/x$ и умею выносить главную степень из корня
- ☐ **Умею определить нужный порядок Тейлора до того, как начал раскладывать**
- ☐ Знаю, что сокращение может повториться дважды — и что это нормально (M-4b)
- ☐ Понимаю ловушку: эквивалентности в разности $\rightarrow$ следующий член
- ☐ Решил A1–A10
- ☐ **Мостик пройден: Ч1–Ч6 решены.** Понимаю, что вектор — это набор чисел, а ранг — число независимых строк
- ☐ Прошёл холодный набор H1–H6 **без подглядывания в темы**, с триажем

- ☐ Попробовал хотя бы одну задачу из каждого «Найди ошибку» (ФК / ФВ / ФП)
- ☐ Теоретический минимум Т-1 ... Т-6 проговорены **вслух**
- ☐ Смешанный повтор: решил КА3, О-3, L-2 с чистого листа (11.3)
- ☐ На одной нерешённой задаче отработал пять пунктов частичных баллов (10.3)
- ☐ **Карта шаткости заполнена честно**
- ☐ Углубление: КС1–КС8 ★, ВС1–ВС4 ★, С1–С6 ★, раздел 2.8 ★, пример М-8 ★, Т-7 ★

11.3. Смешанный повтор

Через несколько дней после того, как прошёл разделы, реши с чистого листа **КА3, О-3** и **L-2**, не подглядывая. Совпало с разбором — методы твои. Нет — вернись к примерам и попробуй снова.

Решённое без повтора через несколько дней выветривается — это свойство памяти, а не твоя вина.