

Числа и вычисления

Численный ответ — это утверждение, а не последняя строка вычисления. Здесь мы восстанавливаем не скорость счёта, а способность понимать, что именно посчитано, и решать, можно ли этому числу доверять.

Что внутри

Как работать с этой методичкой	3
Входной срез	4
Как выбрать маршрут	6
Часть I. Число: значение, запись, вычисление	8
Одна точка — разные записи	9
Границы и расстояние	9
Дробь как число и как действие	11
Вычисление: структура раньше техники	12
Часть II. Число в ситуации: отношения, проценты и единицы	14
Когда отношение задаёт модель	14
Процент всегда имеет базу	16
Что показывает диаграмма	17
Единицы участвуют в вычислении	18
Решение у порога	20
Часть III. Масштаб числа: степени, корни и порядок величины	23
Степень: основание, показатель, скобки	23
Научная запись и порядок	24
Корень и границы значения	24
Как проверить численный ответ	27
Итоговая работа	28
Вопрос к созвону	32

Как работать с этой методичкой

В начале встретятся вещи, которые могут показаться слишком простыми: сравнение чисел, действия с дробями, проценты, перевод единиц. Они здесь не ради школьного повторения. На них держатся более длинные рассуждения, а незамеченная ошибка в знаке, дробной черте или единице меняет не строчку, а всю модель.

Доказывать, что вы способны решить двадцать однотипных примеров, не нужно. Если короткая проверка проходит уверенно и ключевой шаг вы можете объяснить — идите дальше. Если правило узнаётся, но самостоятельно не работает, восстановите его здесь, ровно в нужном объёме.

Основная работа начнётся там, где одного вычисления мало: надо выбрать форму записи, назвать базу процента, сохранить единицы, выбрать уместную точность и понять, хватает ли расчёта для вывода.

◆ Инструменты

Калькулятор, таблица и черновик разрешены. Ни одна задача здесь не проверяет послушание запрету. Проверяется другое:

- в задаче на оценку диапазон фиксируется **до** точного вычисления;
- в задаче на дроби показывается существенное преобразование — число с экрана само по себе ничего не подтверждает;
- в прикладной задаче объясняется, что означает выражение и почему ответу можно доверять.

Это сказано один раз и дальше не повторяется.

◆ Две соседние книги

Рядом с методичками есть ещё две книги, и ни одна из них не является обязательной частью маршрута.

Справочник — формулы, условия их применимости и обозначения, собранные в одном месте. Он не объясняет: всё, что нужно понять, объяснено здесь. Он нужен, когда формула уже понята, но её проще посмотреть, чем вспоминать.

Тренажёр — короткие технические упражнения на беглость. Он назначается точно: если срез показал, что правило узнаётся, но самостоятельно не работает, соответствующий блок тренажёра даст повторения, которых здесь сознательно нет. Блок, диагностика которого пройдена уверенно, не является задолженностью.

◆ Два маршрута

Полный маршрут — читать подряд. Быстрый маршрут — начать со среза ниже и пройти только то, что он отметит, плюс две сильные задачи перед итогом и все три итоговые карты. Общего балла нет; каждый пункт среза маршрутизирует отдельно.

Естественные точки остановки отмечены в тексте. Методичка рассчитана на несколько сессий, а не на один вечер.

Входной срез

Десять коротких пунктов. Ответы к ним — в начале книги решений; рядом с пунктами их нет намеренно, иначе срез перестает работать. Решайте, не подглядывая: цель не оценка, а маршрут.

ВХОДНОЙ СРЕЗ

1. **Разные записи.** Расположите по возрастанию:

$$-0,7, \quad -\frac{2}{3}, \quad \frac{17}{25}, \quad 0,69.$$

Достаточно показать, к какой общей форме вы приводите близкие значения.

2. **Граница и расстояние.** Запишите интервалом множество чисел, которые находятся от 1,4 не дальше чем на 0,3. Отметьте, входят ли обе границы.

3. **Структура дроби.** Вычислите

$$\frac{3}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}.$$

Покажите переход, по которому видно, что именно делится на $\frac{5}{6}$.

4. **Можно ли сокращать?** В записи

$$\frac{18 + 6}{6} = 18 + 1$$

найдите первый неверный переход или подтвердите равенство. Коротко объясните, что разрешено сокращать в дроби.

5. **База процента.** Значение выросло с 80 до 92. На сколько процентов оно выросло и какое из двух чисел является базой?

6. **Процент или процентный пункт.** Доля выросла с 20% до 24%. Назовите изменение в процентных пунктах и относительное — в процентах.

7. **Пропорциональность.** Для двух правил оплаты записана стоимость: $A = 300 + 20q$ и $B = 35q$, где q — объём услуги. Какая стоимость пропорциональна q ? Назовите признак, а не только букву.

8. **Единицы.** Насос подаёт 1,8 л/мин в течение 2 ч. Какой объём он подаст? Сохраните единицы в вычислении.

9. **Степень и корень.** Сравните

$$(-2)^4, \quad -2^4, \quad 2^{-4}, \quad \sqrt{20}.$$

Точные десятичные значения не обязательны.

10. **Сначала оценка.** 47 коробок весят примерно по 1,9 кг, палета — ещё 6,5 кг. До точного умножения выберите один диапазон для общей массы: 15–25 кг, 80–100 кг, 110–130 кг. Затем посчитайте.

Как выбрать маршрут

Сверьтесь с ответами в книге решений и найдите свои пункты в таблице. Если пункт получился уверенно и ключевой шаг объясним — соответствующее восстановление можно пропустить. Итоговые карты пропустить нельзя.

Что случилось в срезе	Куда вернуться	Что подтверждает восстановление
Пункты 1–2: порядок строится по виду записи; границы интервала перепутаны; модуль не читается как расстояние	«Одна точка — разные записи» и «Границы и расстояние»	«Кому из трёх строк можно доверять»
Пункты 3–4: дробная черта не группирует; деление дробей не восстановлено; сокращаются слагаемые	«Дробь как число и как действие» и «Вычисление: структура раньше техники»	«Выберите форму, а не лишнюю работу», затем «Какая формула отвечает условию»
Пункты 5–6: не названа база; проценты и процентные пункты смешаны	«Процент всегда имеет базу»	«Что действительно изменилось в таблице»
Пункт 7: формула с фиксированной частью названа пропорцией	«Когда отношение задаёт модель»	«Тариф меняется на границе»
Пункт 8: время не переведено; единицы исчезли; составная единица прочитана неверно	«Единицы участвуют в вычислении»	«Масштаб площади — не масштаб длины»
Пункт 9: потеряны скобки, отрицательный показатель или смысл корня	«Степень: основание, показатель, скобки»	«Три записи одного порядка» и «Ошибка на один показатель»
Пункт 10: диапазон выбран после вычисления или ошибка на порядок не замечена	«Решение у порога»	«Сколько упаковок гарантированно хватит» или «Ошибка на один показатель»

Два уточнения, без которых быстрый маршрут превращается в чтение ответов. Узнать правило и выполнить его самостоятельно — разные события: если пункт опознан, но не решён, нужна указанная опора и новая попытка. Пробел в двух и более пунктах одной части означает эту часть целиком.

Отдельно про дроби: чтением готового решения этот пробел не закрыть. После восстановления обязательна собственная попытка.

Если после возврата и новой попытки правило понято, но действие остаётся медленным и неустойчивым, нужны повторения — они находятся в тренажёре: пункты 1–2 ведут в блоки Т-01 «Порядок чисел и интервалы» и Т-02 «Арифметика дробей», пункты 3–4 — в Т-02, пункты 5–7 — в Т-03 «Проценты и выбор базы», пункт 9 — в Т-04 «Степени, корни и научная запись». Тренажёр не заменяет ни объяснение, ни итоговые карты.

Быстрый маршрут при полностью сохранной базе выглядит так: срез, две задачи — «Сколько упаковок гарантированно хватит» и «Ошибка на один показатель», три итоговые карты, один вопрос к созвону.

Число: значение, запись, вычисление

Три строки из рабочего файла:

$$-\frac{5}{8} \qquad -0,58 \qquad -\frac{11}{20}$$

Допустимый диапазон: $[-0,65; -0,55)$. Вывод рядом: «все три значения допустимы».

Там же, ниже, расчёт, записанный в строку:

$$2,4 - \frac{3}{5} : \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

с подписью «разность, делённая на оставшуюся долю».

Не считая ничего подробно, ответьте себе на два вопроса. В каком порядке стоят эти три числа? И делает ли вторая запись то, что обещает подпись? Отметьте свой ответ на полях — мы вернёмся к нему дважды.

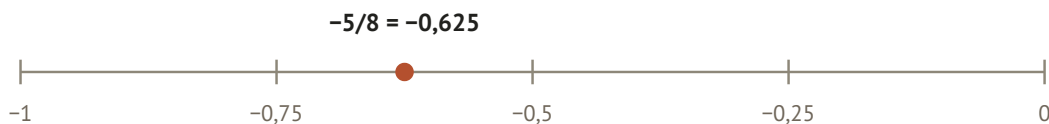
Чтобы решить такой фрагмент, «посчитать столбиком» недостаточно. Нужно сравнить значения, не глядя на вид записи, прочитать границы диапазона и увидеть, что именно группирует дробная черта. С этого и начнём.

Одна точка — разные записи

РАЗБОР

Одна точка — разные записи

Возьмём $-\frac{5}{8}$. Разделим 5 на 8: получится 0,625, то есть $-\frac{5}{8} = -0,625$. Это не «перевод в правильную форму». Это две записи одной и той же точки.



Десятичная форма понадобилась здесь для сравнения с $-0,58$ — и только для этого. Она не «лучше» дробной: у $\frac{1}{3}$ конечной десятичной записи вообще нет, а сравнивать $\frac{17}{25}$ и $\frac{34}{50}$ проще без всякого деления.

Полезнее другое правило: **приводите к общей форме то, что собираетесь сравнивать**, и выбирайте ту форму, в которой сравнение короче.

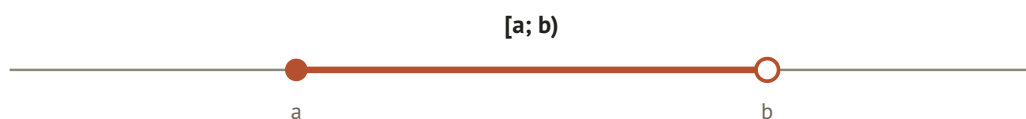
Попробуйте сами: что больше, $-\frac{7}{10}$ или $-\frac{2}{3}$? Длинное деление здесь не нужно.

Границы и расстояние

Число — это точка на прямой. Слева от нуля точки идут в обратном привычном порядке: чем больше модуль, тем меньше само число. $-0,7$ левее $-0,58$, хотя $0,7$ правее $0,58$. Именно здесь чаще всего теряется знак.

Интервал — это множество всех точек между двумя границами. Скобка показывает, входит граница или нет:

- $[a; b]$ — обе границы входят;
- $(a; b)$ — обе не входят;
- $[a; b)$ — левая входит, правая нет;
- $(a; b]$ — наоборот.



Закрашенная точка — граница включена, полая — исключена. Разница выглядит мелкой ровно до того момента, когда значение попадает точно на границу.

Модуль $|x|$ — расстояние от нуля до точки x . Отсюда главное рабочее следствие: $|x - y|$ — расстояние между точками x и y . Оно не бывает отрицательным, и порядок вычитания на него не влияет.

Условие « x отстоит от c не дальше чем на r » записывается как $|x - c| \leq r$ и означает отрезок $[c - r; c + r]$. Это одна из самых полезных записей во всём курсе: так задают допуски, окрестности и области значений.

Теперь можно назвать вещи своими именами. Целые числа лежат внутри рациональных — тех, что записываются отношением двух целых с ненулевым знаменателем. Рациональные лежат внутри действительных — всех точек прямой. На прямой есть точки, соответствующие иррациональным числам, например $\sqrt{2}$. Почему именно так — разберём в части III, когда корень появится по делу.

Кому из трёх строк можно доверять

Допустимый диапазон показателя задан интервалом $[-0,65; -0,55]$.

Строка	Записанное значение	Вывод автора строки
A	$-\frac{5}{8}$	значение допустимо
B	$-0,58$	значение допустимо
C	$-\frac{11}{20}$	значение допустимо, потому что $-0,55$ лежит на границе

Сначала расположите три значения на одной числовой прямой и отметьте границы допустимого интервала. Затем решите, каким выводам можно доверять. Для двух допустимых значений найдите расстояние между ними и до вычисления укажите, будет ли оно меньше 0,1.



Решение →

Дробь как число и как действие

Дробь $\frac{a}{b}$ работает сразу в нескольких смыслах, и путаница обычно возникает не в технике, а между ними:

- **число** — точка на прямой;
- **частное** — результат деления a на b ;
- **отношение** — « a к b »;
- **оператор** — «взять $\frac{a}{b}$ от чего-то».

Умножить на $\frac{3}{4}$ и разделить на $\frac{4}{3}$ — одно и то же действие: взять три четверти. Роль дроби меняется, результат нет.

Равные дроби — это одна точка: $\frac{17}{25} = \frac{34}{50} = 0,68$. Дробь можно сокращать на общий **множитель** числителя и знаменателя. Именно на множитель: в записи $\frac{18+6}{6}$ шестёрка внизу не сокращается с числом 18, потому что наверху стоит сумма, а не произведение. Разрешено разделить на 6 каждое слагаемое:

$$\frac{18+6}{6} = \frac{18}{6} + \frac{6}{6} = 3 + 1 = 4.$$

Знак дроби можно ставить где угодно: $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$. Три записи, одна точка.

Дробная черта делает две вещи одновременно: делит и **группирует**. Всё, что стоит над чертой, считается целиком, и только потом делится на всё, что под ней. Отсюда разница между $\frac{a-b}{c}$ и $a - \frac{b}{c}$ — это не разные способы записать одно, а разные вычисления.

◆ Действия

Сложение и вычитание требуют общего знаменателя:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{15}{20} - \frac{8}{20} = \frac{7}{20}.$$

Умножение — по числителям и знаменателям, с сокращением до умножения, если оно возможно. Деление — умножение на обратную дробь:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}.$$

Конечная десятичная запись существует не у всякой дроби. $\frac{1}{4} = 0,25$ и $\frac{3}{8} = 0,375$ записываются точно, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$ — нет. Это не недостаток числа, а свойство выбранной формы записи.

Порядок действий обычный: скобки, умножение и деление, затем сложение и вычитание. Полезная привычка — до счёта назвать знак результата и его грубый диапазон. Это занимает секунды и ловит большинство ошибок группировки.

Вычисление: структура раньше техники

РАЗБОР

Два способа одного вычисления

$$\frac{3}{8} + 0,25 - \frac{1}{6}$$

Сначала оценка. Первые два слагаемых дают чуть больше 0,6, третье — меньше 0,2. Ответ положительный, примерно 0,45–0,5.

Теперь выбор формы. Соблазн — перевести всё в дроби; но $\frac{3}{8}$ и 0,25 образуют удобную десятичную пару, обе записываются точно:

$$0,375 + 0,25 = 0,625 = \frac{5}{8}.$$

А вот $\frac{1}{6}$ в десятичной форме точно не запишется, поэтому дальше удобнее дроби:

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{6} = \frac{15}{24} - \frac{4}{24} = \frac{11}{24}.$$

$\frac{11}{24} \approx 0,458$ — оценка выдержана.

Проверка обратным действием: $\frac{11}{24} + \frac{1}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$. Это именно проверка, а не повтор той же цепочки клавиш.

Смысл разбора не в том, что «дроби лучше десятичных» или наоборот. Форма выбирается на каждом шаге по тому, точна ли она и коротка ли.

Попробуйте сами: вычислите $\frac{7}{10} - \frac{1}{3}$ и скажите, какая форма здесь удобнее и почему.

Выберите форму, а не лишнюю работу

Рассмотрите выражение

$$1,5 - \left(\frac{5}{6} - 0,25 \right) : \frac{7}{9}.$$

До точного вычисления укажите знак результата и выберите один из диапазонов: $(-1; 0)$, $[0; 1]$, $(1; 2)$.

Вычислите выражение, самостоятельно выбрав, какие числа удобнее оставить десятичными, а какие перевести в обыкновенные дроби. Покажите существенные преобразования. Проверьте результат способом, который не повторяет всю цепочку в том же виде.

Решение →

Вернёмся к записи из начала части.

Какая формула отвечает условию

В расчёте нужно сначала найти разность между 2,4 и $\frac{3}{5}$, а затем разделить её целиком на оставшуюся долю $1 - \frac{1}{4}$.

Две формулы синтаксически допустимы:

$$A = \frac{2,4 - \frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{4}}, \quad B = 2,4 - \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{1}{4}}.$$

Выберите формулу, которая соответствует словесному описанию, и до точного вычисления оцените её результат. Вычислите выбранное выражение, затем объясните, какую другую последовательность действий задаёт вторая формула. Проверьте ответ обратным действием.

Решение →

◆ Естественная остановка

Здесь удобно прерваться. К этому моменту вы можете сравнить значения, записанные по-разному, прочитать интервал вместе с его границами и провести смешанное вычисление с дробями, заранее назвав хотя бы знак или диапазон ответа.

Следующая часть начинается с другого вопроса: что добавляется к числу, когда оно описывает величину в конкретной ситуации?

ДАЛЬШЕ В HARMFUL

Числовая прямая, интервалы, модуль как расстояние и надёжное вычисление вернутся в спринтах 01, 02, 05 и 06 — в неравенствах, областях определения и приближении. К тому моменту полезно свободно читать запись вида $|x - c| < r$. Формальные определения окрестности и предела учить заранее не нужно: они появятся там, где будут работать.

Число в ситуации: отношения, проценты и единицы

Два сервиса считают месячную стоимость по-разному. У первого единица объёма стоит 28 Р, у второго — 43 Р. Вопрос «какой дешевле» кажется решённым за две секунды.

Он не решён. У обоих есть ещё фиксированная часть, и у первого она заметно больше. Значит, ответ зависит от объёма, а само сравнение «за единицу» здесь не работает — хотя выглядит совершенно естественно.

Дальше будет хуже: у решения появится порог. Измерения окажутся приблизительными, запас придётся считать от конкретной величины, а упаковки не делятся пополам. В такой ситуации точное арифметическое действие над неточными данными — обычное дело, и вопрос «сколько получилось» перестаёт совпадать с вопросом «сколько заказывать».

Начнём с того, что отличает пропорцию от всего остального.

Когда отношение задаёт модель

Отношение $a : b$ сравнивает две величины: во сколько раз одна больше другой. Отношение $3 : 7$ означает, что на каждые 3 части первой приходится 7 частей второй, а всего частей 10.

Отсюда сразу следует полезная техника: отношение переводится в доли делением на сумму частей. Для $3 : 7$ доли равны $\frac{3}{10}$ и $\frac{7}{10}$, и если целое известно, каждая часть восстанавливается умножением целого на свою долю.

Величина на единицу — это отношение к количеству: цена за единицу, расход на квадратный метр, скорость. **Пропорция** — равенство двух отношений.

Величина y пропорциональна x , если $y = kx$ с постоянным k . Отсюда два быстрых признака, которые проверяются за десять секунд:

- нулевому входу соответствует нулевой выход;
- удвоение входа удваивает выход.

Пропорция и фиксированная часть

Сравним два правила: $35q$ и $300 + 20q$.

Возьмём $q = 10$: первое даёт 350, второе — 500. Удвоим объём, $q = 20$: первое даёт 700 — ровно вдвое больше. Второе даёт 700 тоже, но вдвое больше было бы 1000. Не сходится.

Причина видна и без чисел: при $q = 0$ второе правило даёт 300, а не ноль. Фиксированная часть никуда не девается. Каждая следующая единица стоит те же 20, но средняя стоимость единицы — это $\frac{300}{q} + 20$, и она падает с ростом объёма. Постоянный коэффициент в формуле и постоянное отношение стоимости к объёму — разные вещи.

Формальное определение здесь тоже работает, но проверка удвоением быстрее и почти не оставляет места самообману.

Попробуйте сами: проверьте тем же способом правило $4 + 1,5q$.

Тариф меняется на границе

Два сервиса считают месячную стоимость по-разному:

Сервис	Фиксированная часть	Цена единицы объёма
А	390 Р	28 Р
В	150 Р	43 Р

Объём может быть нецелым. Найдите объём, при котором стоимости равны, и укажите, какой сервис дешевле ниже и выше этой границы. Проверьте вывод на одном значении по каждую сторону границы.

Затем ответьте: пропорциональна ли полная стоимость объёму хотя бы в одном из сервисов? Если нет, что именно мешает пропорциональности?

Решение →

Процент всегда имеет базу

Процент — это доля, записанная в сотых: 15% означает $\frac{15}{100}$. Само по себе это ничего не сообщает, пока не названо, **от чего** считается доля. Величину, от которой считают, называют базой; в отношении она стоит в знаменателе.

Разберём один короткий случай целиком. Значение выросло с 80 до 92. Прирост равен 12. База — исходные 80, потому что вопрос был «на сколько процентов выросло исходное значение»:

$$\frac{12}{80} = 0,15 = 15\%.$$

Обратная проверка восстанавливает результат: $80 \cdot 1,15 = 92$. Если бы базой взяли 92, получилось бы $\frac{12}{92} \approx 13\%$ — другое число и другой вопрос.

Увеличение на p процентов — умножение на $1 + \frac{p}{100}$, уменьшение — на $1 - \frac{p}{100}$. Отсюда обратная задача: если известен результат и коэффициент, база находится делением. Рост на 15% до 92 означает базу $92 : 1,15 = 80$.

Последовательные изменения считаются каждое от своей новой базы. Рост на 10%, затем падение на 10% дают $1,1 \cdot 0,9 = 0,99$ — на процент меньше исходного, а не ровно исходное. Проценты не складываются.

И отдельная пара, которую путают чаще всего:

- **процентный пункт** — разность двух долей. С 20% до 24% — рост на 4 процентных пункта;
- **относительное изменение** — та же разность, но отнесённая к исходной доле: $\frac{24-20}{20} = 20\%$.

Оба сообщения верны и говорят о разном. «Выросло на 4 пункта» и «выросло на 20 процентов» описывают одно и то же изменение — просто отвечают на разные вопросы.

Что действительно изменилось в таблице

В отчёте сравниваются два **независимых** набора участников:

Период	Начали	Завершили	Доля завершивших	Средняя длительность сессии
I	250	160	64%	41 мин
II	200	144	72%	39 мин

Автор написал: «Результат вырос на 8%; завершивших стало больше; участники второго периода учились успешнее».

Проверьте каждую часть вывода. Для изменения доли сообщите и процентные пункты, и относительное изменение. Укажите, какие данные в таблице не нужны для этих выводов и какой информации не хватает, чтобы говорить об улучшении результатов одних и тех же людей или о причине изменения.

Решение →

Что показывает диаграмма

Таблица показывает числа, диаграмма показывает **картинку** чисел. Картинка читается быстрее — и именно поэтому ошибается чаще.

Перед выводом по диаграмме отвечают на три вопроса.

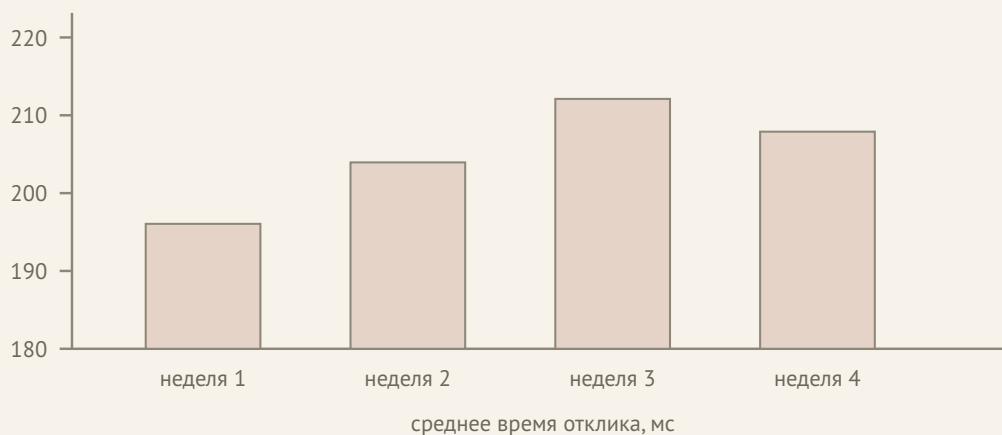
- 1. Что отложено?** Величина и её единица должны быть подписаны. «Столбец выше» само по себе не означает ничего, пока не сказано, выше по какой величине.
- 2. Где начинается шкала?** Ось значений не обязана начинаться с нуля. Если она начинается с другого числа, высота столбца перестаёт быть пропорциональной величине: вдвое более высокий столбец может означать рост на несколько процентов.
- 3. Что здесь сравнивается?** Отношение высот и отношение величин — разные числа, и совпадают они только при шкале от нуля.

Дальше работает уже знакомое правило: изменение сообщается вместе с базой, от которой оно посчитано. База не читается с рисунка — её называют словами.

И последнее, что диаграмма не умеет: она не сообщает, сколько наблюдений стоит за каждым столбцом, насколько они разбросаны и какое значение считается допустимым. Вывод, для которого нужны эти данные, из диаграммы не следует — сколько бы убедительно ни выглядели столбцы.

Столбцы выросли вдвое

В отчёте о работе сервиса приведена диаграмма среднего времени отклика по четырём неделям.



Точные значения, снятые с той же выгрузки: 196, 204, 212 и 208 мс.

К диаграмме приложен вывод: «Время отклика выросло больше чем вдвое — это видно по столбцам. Сервис вышел из-под контроля».

Назовите, что отложено по каждой оси и где начинается шкала значений. Проверьте обе части вывода: во сколько раз выросла высота столбца и во сколько раз выросла сама величина. Сообщите изменение от первой к последней неделе в процентах, явно назвав базу. Затем укажите, какое утверждение из приведённых по этим данным сделать нельзя и какого конкретного данного для него не хватает.

Решение →

Единицы участвуют в вычислении

У величины есть числовое значение и единица, и в вычислении участвуют оба. Единица не подписывается после ответа, а множитель, который можно сокращать и переносить.

Перевод единиц — умножение на единицу, записанную в другой форме. Например, $1 = \frac{60 \text{ мин}}{1 \text{ ч}}$, поэтому

$$2 \text{ ч} \cdot \frac{60 \text{ мин}}{1 \text{ ч}} = 120 \text{ мин},$$

и час честно сокращается, как множитель. Составные единицы работают так же:

$$1,8 \frac{\text{л}}{\text{мин}} \cdot 120 \text{ мин} = 216 \text{ л.}$$

Минуты сократились, литры остались. Если в конце вычисления единица получилась не та, которую вы ожидали, искать ошибку нужно в модели и согласовании единиц, а не только в арифметике.

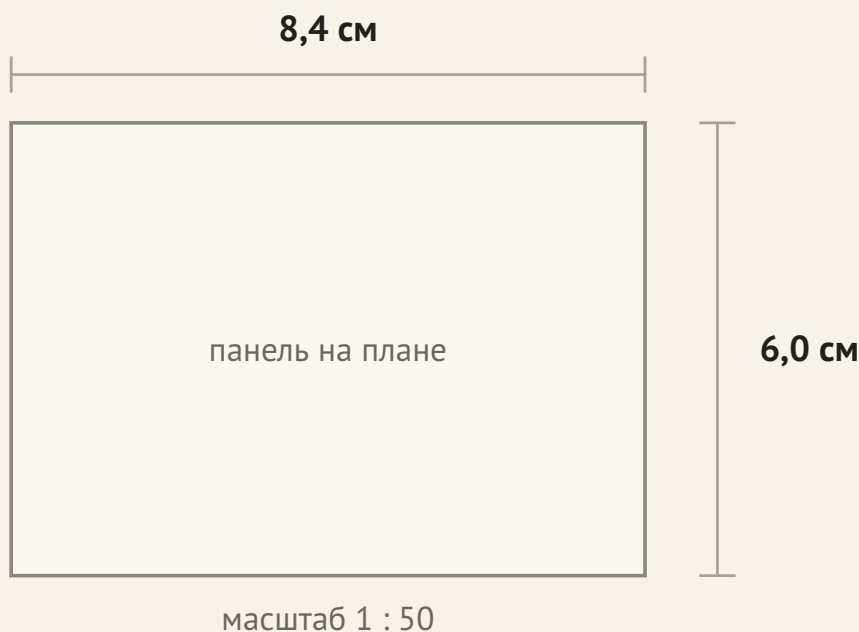
Отдельная ловушка — площадь и объём. Если все длины увеличиваются в k раз, площадь растёт в k^2 раз, а объём — в k^3 . Причина простая: площадь получается перемножением двух длин, объём — трёх, и каждая из них уже умножена на k . Поэтому

$$1 \text{ м}^2 = (100 \text{ см})^2 = 10\,000 \text{ см}^2,$$

а не 100 см^2 . **Масштаб** — тоже отношение длин: запись $1 : 50$ говорит, во сколько раз реальная длина больше длины на плане, и ничего кроме длин напрямую не задаёт.

Масштаб площади — не масштаб длины

На плане масштаба 1 : 50 прямоугольная панель имеет размеры 8,4 см на 6,0 см. Покрытие расходуется по норме 0,18 л/м².



В черновике записано:

$$8,4 \cdot 6,0 \cdot 50 = 2520 \text{ см}^2 = 0,252 \text{ м}^2,$$

поэтому понадобится примерно 0,045 л покрытия.

До пересчёта решите, может ли площадь реальной панели быть меньше одного квадратного метра. Найдите первый неверный переход, восстановите расчёт и сообщите необходимый объём покрытия в литрах. Единицы сохраняйте в существенных переходах.

Решение →

Решение у порога

Знак $=$ означает точное равенство записанных величин. Знак $\approx$ — приближённое сообщение о ситуации. Смешивать их удобно и опасно: выражение может быть вычислено точно, а вот величина, которую оно описывает, известна лишь приблизительно.

Записанное измерение «3,7 м с точностью до 0,1 м» — не число, а интервал. До 3,7 округляются все значения от 3,65 до 3,75; нижняя граница входит, верхняя нет, потому что ровно 3,75 по обычному правилу округляется вверх, до 3,8.

Отсюда важное следствие: направление округления **результата** определяется решением, а не привычкой. Иногда нужно ближайшее значение, иногда — нижняя оценка, а иногда гарантия: наименьшее число, при котором точно хватит при любом допустимом исходном значении. Это три разных ответа на одних и тех же данных.

И последнее: процент запаса считается от явно выбранной величины. От какой именно — часть решения, а не деталь оформления.

Сколько упаковок гарантированно хватит

Прямоугольный пол измерили с точностью до 0,1 м: записаны размеры 6,4 м и 4,8 м. Используется обычное для положительных чисел правило: значение ровно посередине между десятичными округляется вверх. Из площади нужно вычесть точно известные 2,0 м², где покрытие не укладывается. К оставшейся площади добавляют 8% запаса. Одна неделимая упаковка покрывает 2,25 м².



Заказ должен гарантированно покрыть пол при любом фактическом размере, который округляется до записанных 6,4 м и 4,8 м.

До точного расчёта оцените, окажется ли потребность ближе к 20, 30 или 40 м². Определите минимальное число упаковок, которое гарантирует достаточное покрытие, и представьте расчёт так, чтобы было видно, как вы учли точность измерений, исключаемую площадь и запас. Сравните заказ с результатом расчёта только по записанным размерам и объясните возможное различие.

Решение →

ГЛУБЖЕ

Что именно значит «измерено до 0,1»

Запись 6,4 м с точностью до десятых говорит не о числе, а о множестве: подойдёт любая длина из $[6,35; 6,45)$. Полуоткрытый интервал — прямое следствие правила округления: 6,35 округляется до 6,4, а 6,45 уже до 6,5.

Дальше начинается развилка. Если нужен один правдоподобный ответ, берут записанное значение и считают по нему. Если нужна гарантия, берут ту границу интервала, которая делает потребность наибольшей, — и заранее соглашаются на небольшой избыток.

Верхняя граница честна, но не бесплатна: чем больше неопределённость, тем дороже гарантия. Формальная теория погрешностей здесь не нужна; нужен ответ на вопрос «что я готов потерять, если ошибусь в эту сторону». Это уже инженерное, а не арифметическое решение.

◆ Естественная остановка

Хорошее место для перерыва. Теперь вы можете назвать величины, базу и единицы модели, отличить процент от процентного пункта и объяснить, где простая пропорция перестаёт работать.

Следующая часть отвечает на вопрос, который возникает, когда числа становятся очень большими или очень маленькими: как читать их быстро, если обычная запись скрывает масштаб?

ДАЛЬШЕ В HARMFUL

Отношения, масштаб и единицы станут моделями роста, подобия, скорости изменения и площади в спринтах 02, 04, 05 и 06. К тому моменту полезно свободно восстанавливать базу и удерживать единицы в длинном вычислении. Функцию и анализ размерностей как отдельную теорию заранее вводить не нужно.

Масштаб числа: степени, корни и порядок величины

При проверке калибровки получены три положительных значения:

Канал	Запись
A	$4,8 \cdot 10^{-7}$
B	0,00000052
C	известно, что $C^2 = 2,5 \cdot 10^{-13}$

Допустимый интервал: $[4,9 \cdot 10^{-7}; 5,1 \cdot 10^{-7}]$.

Посмотрите на таблицу несколько секунд. Какое значение больше — у канала A или у канала B? А где находится C?

Ответ не читается с листа, и это не про внимательность. Три числа записаны тремя разными способами, и пока они не приведены к общей форме, сравнивать их не с чем. Здесь неудобная запись уже способна скрыть ошибку не в последнем знаке, а на целый порядок.

Степень: основание, показатель, скобки

a^n при натуральном n — это n множителей a . Из одного этого определения выводится почти всё остальное.

Перемножая a^m и a^n , мы просто ставим рядом m и n одинаковых множителей:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Правила работают для **произведения** степеней с одинаковым основанием. К сумме они не относятся: $a^2 + a^3$ не упрощается до a^5 , и проверить это можно одной подстановкой $a = 2$: слева 12, справа 32.

Из правила деления следует остальное. При $m = n$ слева стоит единица, значит $a^0 = 1$ для любого $a \neq 0$. При $m = 0$ то же правило даёт

$$a^{-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}.$$

Отрицательный показатель — не отрицательное число, а обратная величина: $2^{-4} = \frac{1}{16} = 0,0625$, число положительное и маленькое.

Скобки определяют, к чему относится операция, и здесь их роль не формальная:

$$(-2)^4 = 16, \quad -2^4 = -16.$$

В первом случае в четвёртую степень возводится -2 , во втором — только 2 , а минус остаётся снаружи. Ошибка на этом месте меняет знак ответа, а не его точность.

Научная запись и порядок

Научная запись — это $a \cdot 10^n$, где $1 \leq |a| < 10$, а n целое. Число a называют значащей частью, n — порядком. Смысл записи не в компактности, а в том, что она сразу разделяет два вопроса: «насколько велико» и «чему точно равно».

РАЗБОР

Научная запись как сравнение

Приведём $0,00052$ к научной записи. Сначала находим значащую часть — число от 1 до 10: это $5,2$. Затем считаем, на сколько разрядов нужно перенести запятую, чтобы вернуться к исходному числу: на четыре влево, значит показатель -4 :

$$0,00052 = 5,2 \cdot 10^{-4}.$$

Теперь сравнение с $4,8 \cdot 10^{-4}$ занимает секунду. Порядки одинаковы, поэтому решают значащие части: $5,2 > 4,8$. Считать нули не нужно — и не нужно доверять глазу, который их считает.

Если бы порядки различались, значащие части можно было бы вообще не смотреть: любое число порядка 10^{-4} больше любого положительного числа порядка 10^{-6} .

Попробуйте сами: запишите $73\,000\,000$ в научной форме.

Отсюда рабочее правило сравнения: **сначала порядок, потом значащая часть**. И полезная привычка: прежде чем считать длинное выражение, оцените порядок результата. Если потом точный ответ разойдётся с оценкой на порядок — ошибка почти наверняка в показателе, и искать её надо там, а не в четвёртом знаке.

Корень и границы значения

Запись $\sqrt{a}$ обозначает **главный** квадратный корень: то неотрицательное число, квадрат которого равен a . Поэтому $\sqrt{9} = 3$, и только 3.

Уравнение $x^2 = 9$ — другой вопрос, и у него два решения: $x = \pm 3$. Знак $\pm$ появляется при решении уравнения, а не из самого символа корня. Это различие кажется педантичным ровно до первой задачи, где значение восстановлено из квадрата, но по условию положительно.

Отсюда следует запись, которая понадобится дальше постоянно. Соблазнительно сказать, что $\sqrt{x^2} = x$. Проверим на $x = -3$: слева $\sqrt{9} = 3$, справа -3 . Равенство неверно. Причина ровно та же: корень по определению неотрицателен, а x может быть любого знака. Поэтому

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

При $x \geq 0$ это привычное x , при $x < 0$ — противоположное число. Запись с модулем не усложняет, а честно хранит информацию, которую иначе теряют: в алгебре и дальше в анализе именно она не даёт превратить два случая в один.

РАЗБОР

Корень между квадратами

Сколько примерно равно $\sqrt{20}$? Не тянитесь к калькулятору: ответ получается из соседних квадратов.

$4^2 = 16$, $5^2 = 25$, и $16 < 20 < 25$. Из двух положительных чисел большее имеет и больший квадрат, поэтому

$$4 < \sqrt{20} < 5.$$

Двух чисел достаточно, чтобы понять масштаб, и часто этого хватает для решения. Уточнить можно тем же способом: $4,5^2 = 20,25$ — уже больше 20, значит $\sqrt{20}$ чуть меньше 4,5.

И отдельной строкой: $\sqrt{9} = 3$, а решения уравнения $x^2 = 9$ — это 3 и -3 . Первое — значение выражения, второе — ответ на вопрос «какие числа дают в квадрате девять».

С научной записью корень работает так же, но удобнее сначала подготовить запись. Перенесём запятую так, чтобы показатель стал чётным, а числовой множитель — точным квадратом:

$$\sqrt{4,9 \cdot 10^5} = \sqrt{49 \cdot 10^4} = 7 \cdot 10^2.$$

Делить показатель пополам сразу тоже не запрещено: $\sqrt{10^5} = 10^{2,5}$ — совершенно законная запись, и $\sqrt{4,9 \cdot 10^{2,5}}$ равно тому же самому числу. Просто дальше пришлось бы отдельно считать и $\sqrt{4,9}$, и $10^{2,5}$, а научная запись всё равно требует целого показателя, так что ответ в конце понадобилось бы к нему приводить. Подготовка записи убирает оба лишних шага — это вопрос удобства, а не правила.

Три записи одного порядка

При проверке калибровки получены три положительных значения:

Канал	Запись
A	$4,8 \cdot 10^{-7}$
B	0,00000052
C	известно, что $C^2 = 2,5 \cdot 10^{-13}$

Для канала C берётся неотрицательное значение. Допустимый интервал: $[4,9 \cdot 10^{-7}; 5,1 \cdot 10^{-7}]$.

Не выписывая длинные десятичные хвосты, приведите значения к сопоставимой форме, расположите их по возрастанию и решите, какие каналы попадают в допустимый интервал. Проверьте восстановленное значение C возведением в квадрат.

Решение →

Ошибка на один показатель

Нужно вычислить

$$Q = \frac{(3 \cdot 10^4)(2 \cdot 10^{-7})}{\sqrt{9 \cdot 10^{-2}}}.$$

В черновике получено:

$$\begin{aligned}(3 \cdot 10^4)(2 \cdot 10^{-7}) &= 6 \cdot 10^{-3}, \\ \sqrt{9 \cdot 10^{-2}} &= 3 \cdot 10^{-2}, \\ Q &= 2 \cdot 10^{-1}.\end{aligned}$$

До подробного пересчёта оцените порядок числителя, знаменателя и результата. Затем найдите первый неверный переход, исправьте расчёт и запишите ответ в обычной и научной форме. В конце сравните $(-Q)^2$ и $-Q^2$ и объясните роль скобок.

Решение →

ГЛУБЖЕ

Почему $\sqrt{2}$ нельзя записать отношением целых чисел

В части I мы сказали, что не всякая точка прямой рациональна, и привели $\sqrt{2}$. Вот короткое доказательство — не обязательное для дальнейшей работы, но красивое.

Предположим противное: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа и дробь уже сокращена, то есть общих множителей у них нет. Возведём в квадрат: $2 = \frac{m^2}{n^2}$, то есть $m^2 = 2n^2$.

Значит, m^2 чётно. Квадрат нечётного числа нечётен, поэтому чётно и само m : запишем $m = 2k$. Подставим: $4k^2 = 2n^2$, откуда $n^2 = 2k^2$. По той же причине чётно и n .

Но тогда m и n оба делятся на 2 — а мы предположили, что дробь сокращена. Противоречие. Значит, исходное предположение неверно, и $\sqrt{2}$ не является отношением целых чисел.

Воспроизводить это рассуждение по памяти не нужно. Полезно другое: заметить, что доказано отсутствие записи, а не «сложность вычисления». $\sqrt{2}$ — совершенно определённая точка прямой, у которой просто нет дробной формы.

◆ Естественная остановка

Дальше все три линии сходятся. К этому моменту вы умеете оценить порядок результата до подробного счёта и заметить структурную ошибку в степени или корне — то есть отличить «неправильно на два процента» от «неправильно в десять раз».

ДАЛЬШЕ В HARMFUL

Степени, корни и научная запись нужны для алгебры, показательных зависимостей, логарифмов и рядов в спринтах 01, 02, 05 и 06. К тому моменту полезно свободно читать отрицательный показатель и оценивать порядок величины. Дробные показатели как систему, сложные радикалы и логарифмические преобразования заранее осваивать не нужно.

Как проверить численный ответ

Все предыдущие части сводятся к одному протоколу. Он не длинный, и в большинстве задач занимает меньше времени, чем само вычисление.

1. До счёта. Что известно о знаке, диапазоне, порядке и единице? Ответ, записанный до вычисления, стоит дороже, чем кажется: он единственный не испорчен вашей же арифметикой.

- 2. Модель.** Что означает каждое число? Названы ли база процента, единица и ограничение? Если базу нельзя назвать словами, процент считать рано.
- 3. Запись.** Какая операция выполняется и на какую часть записи она действует? Дробная черта, скобки и знак корня — не оформление, а границы действия.
- 4. Точность.** Исходные данные точны или округлены? Что означает число знаков в ответе? Точное значение выражения и точное знание величины — разные вещи.
- 5. Решение.** Что от вас требуется: ближайшее значение, нижняя граница, гарантия или целое число упаковок? Ответ на этот вопрос определяет направление округления.
- 6. Проверка.** Можно ли применить обратное действие, другую форму записи, единицы, граничное значение или порядок величины? Повтор той же последовательности клавиш проверкой не является.

◆ Четыре коротких примера

Обратное действие. Получили $\frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{3}{2}$. Умножаем обратно: $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$. Сошлось.

Значение по обе стороны порога. Нашли, что тарифы равны при $q = 16$. Подставляем $q = 15$ и $q = 17$ и смотрим, меняется ли выгодный сервис. Если при обоих значениях выгоден один и тот же — ошибка не в арифметике, а в выводе.

Цепочка единиц. $1,8 \text{ л/мин} \cdot 2 \text{ ч}$: часы не сокращаются с минутами, поэтому сначала $2 \text{ ч} = 120 \text{ мин}$, и только тогда $1,8 \cdot 120 = 216 \text{ л}$. Единица в ответе — литр, как и должно быть.

Порядок научной записи. Делим $6 \cdot 10^{-3}$ на $3 \cdot 10^{-1}$. Порядок результата — $10^{-3-(-1)} = 10^{-2}$. Ответ $2 \cdot 10^{-1}$ этой оценке противоречит, и искать нужно именно ошибку в показателе.

Итоговая работа

Три карты проверяют разное и не заменяют друг друга. Общего балла нет: успех в одной карте не компенсирует пробел в другой, и это не строгость, а единственный способ увидеть, что именно восстановилось.

Решайте их без решений рядом. Карты независимы и не обязаны решаться подряд.

Признаки хорошего решения — одинаковые для всех трёх:

- ответ соответствует условию и снабжён нужной единицей;
- существенные переходы видны, а не остались в калькуляторе;
- предварительная оценка не противоречит точному ответу;
- проверка отличается от повторения той же последовательности действий.

Условие на прямой

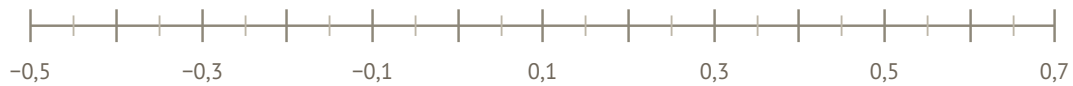
Число x одновременно удовлетворяет условиям

$$|x - 0,1| \leq 0,45 \quad \text{и} \quad x < 0,55.$$

Запишите множество допустимых x одним интервалом и отметьте его на прямой. Затем расположите по возрастанию числа

$$-0,35, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad 0,55, \quad \frac{3}{5}$$

и укажите, какие из них принадлежат найденному интервалу. Для сравнения $\frac{\sqrt{2}}{4}$ достаточно строгих границ, точная десятичная запись не нужна.

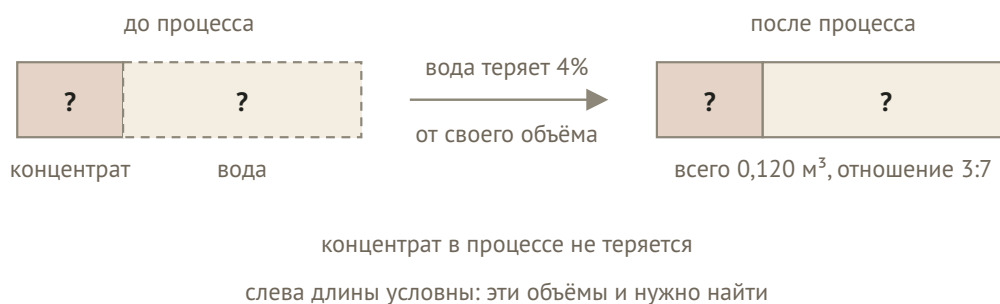


Решение →

Смесь после потери воды

После процесса должно остаться ровно $0,120 \text{ м}^3$ смеси, в которой концентрат и вода относятся как $3 : 7$ по объёму. Концентрат в процессе не теряется, а вода теряет 4% своего первоначального объёма.

Концентрат отмеряют в литрах. Вода поступает с постоянной скоростью $7,5 \text{ л/мин}$, а таймер насоса устанавливается в целых секундах.



До точного расчёта решите, будет ли первоначальный объём воды меньше, равен или больше требуемых в финале 84 л. Затем составьте план: сколько литров концентрата взять и на сколько секунд включить насос, чтобы после потери получить требуемый объём и отношение. Завершите решение независимой проверкой финального объёма и состава.

Решение →

КАРТА С

Достаточно ли точность

Для проверки совместимости заданы два положительных числа:

$$h = 2^{-12}, \quad s^2 = 6,25 \cdot 10^{-8}.$$

Условие совместимости:

$$|s - h| \leq 6 \cdot 10^{-6}.$$

До точного счёта оцените порядок h и s и решите, можно ли принять решение о совместимости только по порядку величины. Затем найдите h и неотрицательное s , запишите их в научной форме, проверьте условие и сделайте вывод. Значение s проверьте возведением в квадрат, а смысл отрицательного показателя в h — переходом к обратной величине.

Решение →

◆ Если карта не получилась

Это обычный исход, и он сообщает не о способностях, а об адресе. Чтение готового решения создаёт ощущение понятности, но не заменяет новой самостоятельной попытки.

- **Карта А** — вернитесь к «Границы и расстояние», затем решите «Кому из трёх строк можно доверять» с изменёнными числами.
- **Карта В** — определите, где именно сломалось: база процента, восстановление частей из отношения или единицы. Вернитесь к «Процент всегда имеет базу» или «Единицы участвуют в вычислении» и сделайте новую попытку соответствующей задачи.
- **Карта С** — вернитесь к «Корень и границы значения», затем к «Ошибка на один показатель».

После опоры нужна новая задача с другими числами, а не повторное чтение той же самой.

Вопрос к созвону

Выберите **один** вопрос из четырёх и подготовьте ответ на пять-семь содержательных минут. Это не билет и не повторный экзамен: цель — рассказать одну идею так, чтобы её услышали остальные.

- 1. Одна точка, разные записи.** Как числовая прямая связывает дробь, интервал и модуль? Покажите один пример и одну ошибку на границе.
- 2. Когда пропорция не работает.** Объясните на тарифе с фиксированной частью, как распознать границу модели и проверить найденный порог.
- 3. Процент, единица и решение.** На одной задаче покажите, почему число без базы и единицы ещё не является ответом.
- 4. Ошибка на порядок.** Объясните, как степень, корень и научная запись помогают заметить неправдоподобный результат до подробного пересчёта.

Рабочий каркас ответа: основная идея своими словами; один пример — свой или взятый отсюда; одна граница или типичная ошибка; связь хотя бы с одной другой частью методички.

Разборы и решения →

Подробные решения всех задач — в отдельной книге. Там же короткие ответы к входному срезу.

https://boosty.to/math_online

