

Что такое математика?

Кит Девлин (Keith Devlin)

глава 1 из книги "Введение в математическое мышление"

(["Introduction to Mathematical Thinking"](#))

При всём том времени, которое в школах уделяется преподаванию математики, очень мало тратится на то, чтобы объяснить, о чём этот предмет (если вообще тратится). Вместо этого акцент делается на изучении и применении различных процедур для решения математических задач. Это всё равно что при объяснении футбола, говорить, что он состоит в выполнении серии маневров, чтобы забить мяч в ворота. Оба варианта точно описывают различные ключевые особенности, но они упускают из виду, "что" и "почему" в общей картине.

Учитывая требования учебной программы, я могу понять, как это происходит, но я считаю это ошибкой. В современном мире общее понимание природы, масштабов, мощи и ограничений математики особенно ценно для любого гражданина. За годы работы я встретил много людей, которые получили дипломы по таким математически насыщенным дисциплинам, как инженерное дело, физика, информатика и даже сама математика, и которые рассказывали мне, что за всё время обучения в школе и университете они так и не получили хорошего представления о том, что такое современная математика. Только на более позднем этапе жизни они иногда улавливают истинную природу этого предмета и начинают ценить его всепроникающую роль в современной жизни.

1. Больше, чем арифметика

Большинству математических дисциплин, используемых в современной науке и технике, не более трёхсот-четырёхсот лет, а многим из них менее ста лет. Однако типичная программа средней школы включает в себя математику возраст, которой превышает более старый из вышеуказанных периодов, а некоторым разделам более двух тысяч лет!

Нет ничего плохого в том, чтобы учить чему-то настолько старому. Как говорится, если что-то не сломалось, не надо чинить. Алгебра, которую арабоязычные торговцы разработали в VIII и IX веках (слово *алгебра* происходит от арабского термина *аль-джабр*, что означает "восстановление" или "воссоединение сломанных частей"), чтобы повысить эффективность своих деловых операций, остаётся такой же полезной и важной сегодня, как и тогда, хотя сегодня мы можем реализовать это в макросе электронной таблицы, а не с помощью средневековых расчётов на пальцах. Но время идёт, общество развивается. В процессе этого возникает и со временем удовлетворяется потребность в новой математике. Образование должно идти в ногу со временем.

Можно сказать, что математика началась с изобретения чисел и арифметики, что, как считается, произошло около десяти тысяч лет назад с появлением денег. (Да, оказывается, всё началось с денег!)

В последующие века древние египтяне и вавилоняне расширили предмет, включив в него геометрию и тригонометрию.¹ В тех цивилизациях математика была в основном утилитарной и в значительной степени напоминала "книгу рецептов". ("Сделайте то-то и то-то с числом или геометрической фигурой, и вы получите ответ.")

Период с около 500 г. до н.э. до 300 г. н.э. был эрой греческой математики. Математики древней Греции особенно высоко ценили геометрию. Действительно, они относились к числам

¹ Другие цивилизации также развивали математику; например, китайцы и японцы. Но математика этих культур, по-видимому, не оказала прямого влияния на развитие современной западной математики, поэтому в этой книге я их игнорирую.

геометрически, как к измерениям длины, и когда они обнаружили, что существуют длины, которым их числа не соответствуют (по сути, это было открытие иррациональных чисел), их изучение чисел в значительной степени остановилось.²

Фактически, именно греки сделали математику областью изучения, а не просто сборником техник для измерения, подсчёта и учёта. Около 500 г. до н.э. Фалес Милетский (Милет сейчас является частью Турции) ввёл идею о том, что точно сформулированные утверждения математики могут быть логически доказаны с помощью формальных аргументов. Это нововведение ознаменовало рождение теоремы, которая теперь является основой математики. Этот формальный подход греков достиг своего апогея в публикации "*Начал*" Евклида – считающейся самой широко распространённой книгой всех времён после Библии.³

По большому счёту, школьная математика основана на всех тех наработках, которые я перечислил выше, а также всего лишь на двух более поздних достижениях, оба из которых относятся к XVII веку: математический анализ и теория вероятностей. Практически ничего из того, что было создано за последние триста лет, не попало в школьные классы. И всё же большая часть математики, используемой в современном мире, была разработана за последние двести лет, не говоря уже о последних трёхстах!

В результате, любой человек, чьё представление о математике ограничивается тем, что обычно преподаётся в школах, вряд ли по-настоящему оценит, что исследования в области математики – это процветающая всемирная деятельность, или согласится с тем, что математика пронизывает, зачастую в значительной степени, большинство сфер современной жизни и общества. Например, вряд ли многие знают, в какой организации в США работает наибольшее количество докторов наук по математике. (Ответ почти наверняка – Агентство национальной безопасности, хотя точное число сотрудников является тайной. Большинство из этих математиков работают над взломом кодов, чтобы агентство могло читать зашифрованные сообщения, перехватываемые системами мониторинга – по крайней мере, так принято считать, хотя агентство опять же не говорит об этом. Несмотря на то, что большинство американцев, вероятно, знают, что АНБ занимается взломом кодов, многие не осознают, что для этого требуется математика, и поэтому не считают АНБ организацией, которая нанимает большое количество продвинутых математиков.)

Взрыв математической активности, в особенности который произошёл за последние сто лет или около того, был впечатляющим. В начале XX века математику можно было с полным основанием рассматривать как состоящую из около двенадцати различных предметов: арифметики, геометрии, математического анализа и некоторых других. Сегодня количество отдельных категорий составляет от шестидесяти до семидесяти, в зависимости от того, как их считать. Некоторые предметы, такие как алгебра или топология, разделились на различные поднаправления; другие, такие как теория сложности или теория динамических систем, являются совершенно новыми областями изучения.

Резкий рост развития математики привёл в 1980-х годах к появлению нового определения математики как *науки о закономерностях*. Согласно этому описанию, математик выявляет и анализирует абстрактные закономерности – числовые закономерности, закономерности формы, закономерности движения, закономерности поведения, закономерности голосования населения, закономерности повторения случайных событий и так далее. Эти паттерны могут быть реальными

² Существует часто повторяемая история о том, что молодой греческий математик, который сделал это открытие, был вывезен в море и утоплен, чтобы ужасные новости о том, что он обнаружил, не просочились. Насколько я знаю, нет никаких доказательств, подтверждающих этот фантастический рассказ. Жаль, потому что это великолепная легенда.

³ Учитывая современные массовые тиражи книг в мягкой обложке, определение "широко распространённый" должно, по-видимому, включать количество лет, в течение которых книга была в обращении.

или воображаемыми, визуальными или мысленными, статичными или динамичными, качественными или количественными, утилитарными или развлекательными. Они могут возникать из окружающего нас мира, из научного поиска или из внутренней работы человеческого разума. Различные виды закономерностей дают начало разным разделам математики. Например:

- Арифметика и теория чисел изучают закономерности чисел и счёта.
- Геометрия изучает закономерности формы.
- Математический анализ позволяет нам оперировать закономерностями движения.
- Логика изучает закономерности рассуждений.
- Теория вероятностей имеет дело с закономерностями случайности.
- Топология изучает закономерности близости и положения.
- Фрактальная геометрия изучает самоподобие, встречающееся в природе.

2. Математические обозначения

Один из аспектов современной математики, который очевиден даже для случайного наблюдателя, – это использование абстрактных обозначений: алгебраических выражений, сложных на вид формул и геометрических диаграмм. Использование математиками абстрактных обозначений отражает абстрактную природу закономерностей, которые они изучают.

Различные аспекты реальности требуют разных форм описания. Например, наиболее подходящий способ изучить местность или описать кому-то, как найти дорогу в незнакомом городе, – это нарисовать карту. Текст здесь подойдёт гораздо меньше.

Аналогично, линейные рисунки с аннотациями (чертежи) наиболее подходят для представления конструкции здания. А нотная запись наиболее подходит для представления музыки на бумаге. В случае различных видов абстрактных, формальных паттернов и абстрактных структур наиболее подходящим средством описания и анализа является математика, использующая математические обозначения, концепции и процедуры.

Например, коммутативный закон сложения можно записать на обычном языке следующим образом:

Когда складываются два числа, их порядок не важен.

Однако обычно его записывают в символьной форме:

$$m + n = n + m$$

В то время как символьная форма не имеет значительного преимущества для такого простого примера, как этот, сложность и степень абстракции большинства математических паттернов таковы, что использование чего-либо другого, кроме символьной записи, было бы непомерно громоздким. Поэтому развитие математики сопровождалось постепенным увеличением использования абстрактных обозначений.

Хотя введение символьной математики в её современной форме обычно приписывается французскому математику Франсуа Виету в XVI веке, самое раннее появление алгебраической нотации, по-видимому, было в работе Диофанта, который жил в Александрии примерно в 250 г. н.э. Его тринадцатитомный трактат "Арифметика" (сохранилось только шесть томов) принято считать первым учебником алгебры. В частности, Диофант использовал специальные символы для обозначения неизвестного в уравнении и для обозначения степеней неизвестного, у него были символы для вычитания и равенства.

В наши дни книги по математике, как правило, переполнены символами, но математическая нотация является математикой не в большей степени, чем нотная запись – музыкой. Страница нотного листа *отображает* музыкальное произведение; сама музыка – это то, что вы получаете, когда ноты со страницы поются или исполняются на музыкальном инструменте. Именно в процессе исполнения музыка оживает и становится частью нашего опыта. Музыка существует не на печатной странице, а в нашем разуме. То же самое верно и для математики. Символы на странице – это всего лишь *отображение (представление)* математики. Когда их читает компетентный исполнитель (в данном случае кто-то, обученный математике), символы на печатной странице оживают – математика живёт и дышит в уме читателя, как некая абстрактная симфония.

Повторю, причина абстрактной нотации заключается в абстрактной природе закономерностей, которые математика помогает нам выявлять и изучать. Например, математика необходима нам для понимания невидимых закономерностей Вселенной. В 1623 году Галилей писал:

"Великую книгу природы может прочесть только тот, кто знает язык, на котором она написана. И этот язык – математика."⁴

В самом деле, физику можно правильно описать как Вселенную, рассматриваемую через призму математики.

Вот только один пример. Как результат применения математики для формулирования и понимания законов физики у нас теперь есть возможность путешествовать по воздуху. Когда реактивный самолет пролетает над головой, вы не видите ничего, что бы его удерживало в воздухе. Только с помощью математики мы можем "увидеть" незримые силы, которые его поднимают. В данном случае эти силы были определены Исааком Ньютоном в XVII веке, который также разработал математику, необходимую для их изучения, хотя должно было пройти несколько столетий, прежде чем технологии развились до такой степени, что мы действительно смогли использовать математику Ньютона (усиленную множеством дополнительных математических методов, разработанных в промежутке) для создания самолетов. Это лишь одна из многих иллюстраций одного из моих любимых мемов, описывающих то, что делает математика: *математика делает невидимое видимым*.

3. Современная университетская математика

После этого краткого обзора истории развития математики я могу приступить к объяснению того, как современная математика в университетах стала принципиально (фундаментально) отличаться от математики, которую преподают в школе.

Вплоть до наступления момента времени около 150 лет назад, хотя математики давно уже расширили область изучаемых ими объектов за пределы чисел (и алгебраических символов для чисел), они по-прежнему рассматривали математику как в первую очередь *вычисления*. То есть, математическое мастерство в основном означало умение выполнять вычисления или манипулировать символьными выражениями для решения задач. По большому счёту, математика в средней школе до сих пор в значительной степени основана на этой более ранней традиции.

Но в течение XIX века, по мере того как математики решали задачи всё большей сложности, они начали обнаруживать, что эти более ранние интуитивные представления о математике порой становились несостоятельными в качестве руководства для работы. Контринтуитивные (и иногда парадоксальные) результаты заставили их осознать, что некоторые из методов, которые они разработали для решения важных реальных проблем, имели последствия, которые они не могли

⁴ Галилео Галилей. "Пробирных дел мастер". Это часто повторяемая перефразировка его настоящих слов.

объяснить. Парадокс Банаха-Тарского, например, говорит, что вы можете, в принципе, взять сферу и разрезать её таким образом, чтобы собрать из неё две одинаковые сферы, каждая из которых будет того же размера, что и исходная. Поскольку математика правильная, результат Банаха-Тарского пришлось принять как факт, даже несмотря на то, что он не поддаётся нашему воображению.

Тогда стало ясно, что математика может привести к таким областям, где единственным источником понимания является сама математика. Чтобы быть уверенными в том, что мы можем полагаться на открытия, сделанные с помощью математики – но не поддающиеся проверке другими способами – математики обратили методы математики вовнутрь и использовали их для изучения самого предмета.

Этот самоанализ привёл к тому, что в середине XIX века была принята новая, отличная от прежней концепция математики, в которой основное внимание уделялось уже не выполнению расчётов или вычислению ответов, а формулированию и пониманию абстрактных понятий и отношений. Это было смещение акцента с *выполнения действий* на *понимание*. Математические объекты больше не рассматривались как заданные в основном формулами, а скорее как носители концептуальных свойств. Доказательство чего-либо уже не сводилось к преобразованию терминов в соответствии с правилами, а представляло собой процесс логического вывода из концепций.

Эта революция – а именно она и произошла – полностью изменила представление математиков о своем предмете. Однако для остального мира этого сдвига могло и не произойти. Первыми, кто кроме профессиональных математиков узнал, что что-то изменилось, были учащиеся университетов, когда новый материал появился в учебной программе бакалавриата. Если Вы, как студент, изучающий математику, почувствуете, что у Вас кружится голова после первого знакомства с этой "новой математикой", Вы можете возложить вину на математиков Лежена Дирихле, Рихарда Дедекинда, Бернарда Римана и всех остальных, кто положил начало новому подходу.

Для предвкушения того, что Вам предстоит, приведу один пример такого сдвига. До XIX века математики использовали формулу, такую как $y = x^2 + 3x - 5$, чтобы обозначить *функцию*, которая производит новое число y из любого данного числа x . Затем пришёл революционер Дирихле и сказал забыть формулу и сосредоточиться на том, что функция *делает* с точки зрения поведения входных и выходных значений. *Функция*, по Дирихле, – это любое правило, которое производит новые числа из старых. Правило не обязательно должно быть задано алгебраической формулой. В действительности, нет причин ограничивать ваше внимание числами. Функция может быть любым правилом, которое берёт объекты одного вида и создаёт из них новые объекты.

Это определение узаконивает функции, подобные той, которая определяется для действительных чисел по правилу:

Если x – рационально, установить $f(x) = 0$; если x – иррационально, установить $f(x) = 1$.

Попробуйте графически изобразить этого монстра!

Математики начали изучать свойства таких *абстрактных* функций, задаваемых не формулами, а поведением. Например, имеет ли функция такое свойство, что при подаче различных начальных значений она всегда даёт разные ответы? (Это свойство называется *инъективностью*.)

Этот абстрактный, концептуальный подход был особенно плодотворен при разработке нового предмета под названием теория функций действительного переменного (real analysis), в котором математики изучали свойства непрерывности и дифференцируемости функций как самостоятельные абстрактные понятия. Французские и немецкие математики разработали

"эпсилон-дельта" определения непрерывности и дифференцируемости, освоение которых по сей день требует огромных усилий от каждого нового поколения студентов, изучающих математику.

Опять же, в 1850-х годах, Риман определил комплексную функцию по её *свойству дифференцируемости*, а не по формуле, которую он считал вторичной.

Классы вычетов, определённые знаменитым немецким математиком Карлом Фридрихом Гауссом (1777–1855), с которыми вы, скорее всего, познакомитесь на курсе алгебры, были предшественниками подхода, теперь ставшего стандартным, согласно которому математическая структура определяется как множество, наделённое некоторыми операциями, поведение которых задаётся аксиомами.

Следуя примеру Гаусса, Дедекиннд исследовал новые концепции *кольца*, *поля* и *идеала*, каждая из которых была определена как совокупность объектов, наделённых заданными операциями. (Опять же, с этими концепциями вы, вероятно, скоро столкнетесь при изучении математики после окончания курса математического анализа).

И было ещё много изменений.

Как и большинство революций, перемены XIX века берут свое начало во времена задолго до появления на сцене главных действующих лиц. Греки, безусловно, проявляли интерес к математике как концептуальному занятию, а не только к вычислениям; а в XVII веке соавтор математического анализа Готфрид Лейбниц глубоко размышлял об обоих подходах. Но по большей части, вплоть до XIX века математика рассматривалась в первую очередь как сборник процедур для решения задач. Однако для сегодняшних математиков, полностью воспитанных на постреволюционной концепции математики, то, что в XIX веке считалось революцией, просто воспринимается как то, чем является математика. Революция могла бы быть тихой и в значительной степени забытой, но она была полноценной и далеко идущей. Это и послужило основой для написания данной книги, главная цель которой – предоставить вам основные умственные инструменты, необходимые для того, чтобы войти в этот новый мир современной математики (или, по крайней мере, научиться мыслить математически).

Хотя концепция математики, сформировавшаяся после XIX века, в настоящее время доминирует в математических дисциплинах в университетах, она не оказала большого влияния на математику средней школы — вот почему вам нужна такая книга, как эта, чтобы помочь освоиться. Была одна попытка внедрить новый подход в школьные классы, но она пошла ужасно неправильно, и вскоре от неё пришлось отказаться. Это было так называемое движение "новой математики" 1960-х годов. Вот что пошло не так: к тому времени, когда послание революционеров дошло с математических факультетов ведущих университетов до школ, оно было сильно искажено.

Для математиков до и после середины 1800-х годов всегда были важны и вычисления, и понимание. Революция XIX века просто сместила *акценты* в отношении того, что играет главную роль в предмете и что занимает производную или вспомогательную роль. К сожалению, послание дошло до школьных учителей в 1960-х годах примерно в таком виде: "Забудьте навыки вычислений, сосредоточьтесь только на концепциях." Эта нелепая и в конечном итоге катастрофическая стратегия привела сатирика (и математика) Тома Лерера к шутке в его песне "Новая математика": "Важен сам метод, и неважно, если вы не получите правильный ответ." После нескольких печальных лет "новая математика" (которой, заметьте, было уже более ста лет) была в значительной степени исключена из школьной программы.

Такова природа образовательной политики в свободных обществах, что маловероятно, что подобное изменение могло бы быть осуществлено когда-либо в обозримом будущем, даже если бы оно было сделано правильно во второй раз. Также неясно (по крайней мере для меня), было

ли бы такое изменение вообще желательно. Существуют образовательные аргументы (которые, в отсутствие твердых доказательств в ту или иную сторону, горячо обсуждаются), согласно которым человеческий разум должен достичь определенного уровня мастерства в вычислениях с абстрактными математическими сущностями, прежде чем он сможет рассуждать об их свойствах.

4. Зачем вам нужно изучать всё это?

Теперь должно быть ясно, что произошедший в XIX веке переход от вычислительного взгляда на математику к концептуальному был изменением внутри профессионального математического сообщества. Их интерес, как профессионалов, был связан с самой природой математики. Для большинства учёных, инженеров и других людей, использующих математические методы в своей повседневной работе, всё оставалось по-прежнему, и остаётся неизменным по сей день. Вычисления (и получение правильного ответа) остаются такими же важными, как всегда, и используются даже более широко, чем когда-либо в истории.

В результате, для любого, кто не принадлежит к математическому сообществу, этот сдвиг выглядит скорее как *расширение* математической деятельности, чем как смена фокуса. Вместо того чтобы просто изучать процедуры решения задач, студенты, занимающиеся математикой в университетах, сегодня *также* (т.е. *в дополнение*) должны овладеть основополагающими концепциями и уметь обосновывать методы, которые они используют.

Разумно ли требовать этого? Хотя профессиональные математики – чья работа заключается в разработке новой математики и подтверждении её правильности – нуждаются в таком концептуальном понимании, зачем предъявлять это требование к тем, чья цель – продолжить карьеру, в которой математика является всего лишь инструментом? (Например, инженерное дело.)

Есть два ответа, оба из которых имеют высокую степень обоснованности. (СПОЙЛЕР: это только кажется, что есть два ответа. При более глубоком анализе они оказываются одинаковыми.)

Во-первых, образование – это не только освоение конкретных инструментов для использования в дальнейшей карьере. Как одно из величайших творений человеческой цивилизации, математика должна преподаваться наряду с естественными науками, литературой, историей и искусством, чтобы передавать жемчужины нашей культуры от одного поколения к другому. Мы, люди, гораздо больше, чем работа, которую мы выполняем, и карьера, которую мы преследуем. Образование – это подготовка к жизни, и только частью этого является овладение конкретными трудовыми навыками.

Этот первый ответ, безусловно, не требует дальнейших обоснований. Второй ответ касается вопроса об инструментах для работы.

Несомненно, многие профессии требуют математических навыков. Действительно, в большинстве отраслей, практически на любом уровне, математические требования оказываются выше, чем принято считать. К такому выводу приходят многие люди, когда ищут работу и обнаруживают, что у них недостаточно математических знаний.

За многие годы мы привыкли к тому, что для продвижения в индустриальном обществе требуются работники, обладающие математическими навыками. Но если присмотреться повнимательнее, эти навыки делятся на две категории. Первая категория включает людей, которые, получив математическую задачу (т.е. задачу, уже сформулированную в математических терминах), могут найти её математическое решение. Вторая категория включает людей, которые могут взять новую задачу, скажем, в производстве, определить и описать ключевые особенности задачи математически и использовать это математическое описание для точного анализа.

В прошлом был огромный спрос на сотрудников с навыками 1-го типа и небольшая потребность в талантах 2-го типа. Наш процесс математического образования в значительной степени удовлетворял обе потребности. Он всегда был сосредоточен на подготовке людей первой категории, но некоторые из них неизбежно оказывались хороши и в другом виде деятельности. Так что всё было хорошо. Но в сегодняшнем мире, где компаниям приходится постоянно внедрять инновации, чтобы оставаться в бизнесе, спрос смещается в сторону математических мыслителей 2-го типа – людей, которые могут мыслить вне математических рамок, а не внутри них. И теперь, внезапно, всё пошло не так, как надо.

Всегда будут нужны люди, владеющие целым рядом математических техник, способные долгое время работать самостоятельно, глубоко сосредоточившись на решении конкретной математической задачи, и наша система образования должна поддерживать их развитие. Но в XXI веке большой спрос будет на способности 2-го типа. Поскольку у нас нет названия для таких людей ("математически способный" или даже "математик" обычно подразумевает мастерство 1-го типа), я предлагаю назвать их так: *инновационные математические мыслители*.

Этот новый тип людей (ну, он не новый, я просто не думаю, что кто-то раньше обращал на них пристальное внимание) должен будет, прежде всего, обладать хорошим концептуальным пониманием математики, её силы, масштаба, когда и как она может быть применена, и какие у неё ограничения. У них также должен быть твердый уровень мастерства в некоторых базовых математических навыках. Но это мастерство не обязательно должно быть выдающимся. Гораздо важнее, чтобы они умели хорошо работать в команде, часто междисциплинарной, видели вещи по-новому, быстро учились и осваивали новые техники, которые потребуются, а также хорошо умели адаптировать старые методы к новым ситуациям.

Как мы обучаем таких людей? Мы сосредотачиваемся на концептуальном мышлении, которое лежит в основе всех конкретных техник математики. Помните старую поговорку: "Дай человеку рыбу, и он наестся на один день. Научи человека ловить рыбу, и он будет сыт всю жизнь."? Точно также обстоит и с математическим образованием для жизни в XXI веке. Существует так много различных математических техник, всё время разрабатываются новые, поэтому невозможно охватить их все за 16 лет обучения в школе и университете. К тому времени, когда студент-первокурсник выпустится и выйдет на работу, многие из конкретных техник, изученных за университетские годы, вероятно, уже не будут столь важны, в то время как новые будут в тренде. Основное внимание в образовании должно быть направлено на то, чтобы научиться тому, как учиться.

Возрастающая сложность математики заставила математиков в XIX веке сместить (если хотите, расширить) фокус с вычислительных навыков на умения, связанные с основополагающим, фундаментальным, концептуальным мышлением. Теперь, спустя 150 лет, изменения в обществе, которым отчасти способствовала эта более сложная математика, сделали это смещение фокуса важным не только для профессиональных математиков, но и для всех, кто изучает математику с целью её использования в мире.

Итак, теперь вы знаете не только почему математики в XIX веке сместили фокус в математических исследованиях, но и почему, начиная с 1950-х годов, от студентов, изучающих математику в университетах, стали ожидать овладения концептуальным математическим мышлением. Другими словами, теперь вы знаете, почему ваш колледж или университет хочет, чтобы вы прошли этот переходный курс, и, возможно, будете работать с этой книгой. Надеюсь, теперь вы также понимаете, почему это может быть важно для ВАС в вашей жизни, а не только для того, чтобы выжить на университетских курсах математики.